METODE NUMERICE

SI

EXPERIMENTALE

CUPRINS

CAPITOLUL 1

ECUAŢII DIFERENŢIALE CU DERIVATE PARŢIALE

1.1. INTRODUCERE

Ecuaţiile dinamicii fluidelor constituie expresia *principiilor generale de conservare* completate cu o serie de *relaţii constitutive* de închidere. Evoluţia unui sistem fizic este complet determinată de anumite legi de conservare: *conservarea masei, impulsului şi energiei*, deşi există proprietăţi fizice care nu pot fi exprimate sub formă conservativă (de exemplu, entropia sau presiunea). Majoritatea modelelor matematice ale mecanicii mediilor continue conţine ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale. Deoarece fiecare model reprezintă un anumit fenomen fizic din natură, este foarte importantă înţelegerea semnificaţiei fizice a acestora. Mai mult, analiza proprietăţilor fizice ale ecuaţiilor şi sistemelor diferenţiale cu derivate parţiale este de o importanţă deosebită, având în vedere că integrarea numerică trebuie întotdeauna făcută în concordanţă cu acestea. Ecuaţiile dinamicii fluidelor sunt ecuaţii diferenţiale care conţin derivate de ordinul întâi sau al doilea în spaţiu şi doar de ordinul întâi în timp. Fluxurile convective conţin derivate de ordinul întâi, pe când cele difuzive, derivate de ordinul al doilea. Dacă derivatele temporale sunt liniare, cele spaţiale pot fi fie liniare, fie neliniare. Cu excepţia ecuaţiei potenţialului, toate celelalte modele ale dinamicii fluidelor sunt reprezentate de mai mult de o ecuaţie diferenţială, deci de sisteme diferenţiale cu derivate parţiale.

Un obiectiv major al acestui capitol îl constituie analiza teoretică a legăturii între ecuaţiile şi sistemele de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale şi condiţiile la limită şi iniţiale asociate lor, pentru asigurarea formulării unei probleme bine puse. Ansamblul format din ecuaţiile cu derivate parţiale şi condiţiile iniţiale şi la limită asociate acestora formează o problemă bine pusă din punct de vedere matematic, dacă sunt îndeplinite condiţiile: 1) soluţia problemei există, 2) soluţia problemei este unică, 3) soluţia depinde în mod continuu de condiţiile iniţiale şi la limită (Hadamard, [122]).

Asigurarea existenţei *soluţiei numerice* a unei anumite probleme se face, în general, fără dificultate. Există însă şi excepţii, spre exemplu, în cazul utilizării soluţiei exacte a ecuaţiei Laplace (soluţia de tip sursă), când soluţia nu există în punctul în care este poziţionată sursa. De regulă, în contextul metodelor numerice, această problemă este evitată prin poziţionarea surselor în afara domeniului de calcul.

Cauza uzuală care face ca soluţia unei probleme să nu fie unică este neconcordanţa între ecuaţiile sau sistemele diferenţiale cu derivate parţiale şi condiţiile la limită asociate. Vom analiza, pentru fiecare tip de problemă, (eliptică, parabolică sau hiperbolică) modalitatea de formulare a condiţiilor la limită şi a condiţiilor iniţiale pentru asigurarea unicităţii soluţiei. Trebuie totuşi să facem observaţia că într-un calcul numeric, pe lângă *condiţiile la limită fizice* impuse prin formularea matematică a unei anumite probleme, vor trebui definite şi o serie de *condiţii la limită numerice*. Acestea pot fi specifice unui anumit algoritm de calcul, sau pot fi mai generale, legate de specificul abordării numerice a unei anumite probleme. Spre exemplu, dacă în formularea matematică a unui model de curgere exterioară putem presupune frontiera domeniului de analiză la o distanţa infinită de configuraţia geometrică analizată, iar pe aceasta presupunem condiţiile unei curgeri uniforme, într-un calcul numeric frontiera exterioară a domeniului de calcul va fi întotdeauna la distanţă finită, ceea ce necesită definirea unor condiţii la limită la distanţă finită, condiţii care vor depinde de soluţia calculată în interiorul domeniului.

Asigurarea unicităţii soluţiei numerice este în strânsă legătura cu asigurarea semnificaţiei fizice a acesteia. Există situaţii, ca în cazul ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii neliniare, când însuşi modelul matematic admite soluţii multiple. În acest caz este necesară formularea unor condiţii suplimentare, exterioare modelului matematic al problemei, pentru ca soluţia numerică să aibă relevanţă fizică (de exemplu, condiţia de entropie).

A treia cerinţă pentru a avea o problemă bine pusă impune ca variaţii mici în condiţiile iniţiale şi la limită să conducă la variaţii mici ale soluţiei calculate. De regulă, într-un calcul numeric implementarea condiţiilor la limită se face aproximativ, şi pe lângă condiţiile la limită fizice apar şi condiţii la limită numerice. În consecinţă, dacă soluţia exactă a problemei abordate depinde în mod continuu de condiţiile iniţiale şi la limită, orice eroare în implementarea numerică a acestora se va propaga şi în interiorul domeniului afectând acurateţea soluţiei numerice.

Acest capitol debutează cu o clasificare a ecuaţiilor şi sistemelor diferenţiale din Dinamica fluidelor pe considerente fizice, urmată de prezentarea principalelor ecuaţii model întâlnite în domeniul mecanicii mediilor continue. Se continuă cu prezentarea proprietăţilor matematice fundamentale ale ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi şi de ordinul al doilea. Studiul proprietăţilor matematice permite formularea corectă a condiţiilor la limită şi iniţiale şi determinarea domeniilor de dependenţă şi, respectiv, de influenţă fizică, care vor sta la baza discretizării numerice. Se vor analiza, pe rând, ecuaţiile şi sistemele cu derivate parţiale liniare şi neliniare, insistându-se asupra proprietăţilor sistemelor de tip hiperbolic, care prezintă un interes deosebit în domeniul metodelor numerice din Dinamica fluidelor. În finalul capitolului sunt date reprezentările integrale ale soluţiilor ecuaţiilor Laplace şi Prandtl-Glauert, pe care se bazează metodele de simulare numerică cu singularităţi utilizate în aerodinamica liniară.

1.2. CLASIFICARE PE BAZA PROPRIETĂŢILOR FIZICE

Modelele matematice ale Dinamicii fluidelor reprezintă o reflectare a proprietăţilor fizice ale mişcării fluidelor, în condiţiile unor ipoteze specifice. Mişcarea unui fluid este rezultatul interacţiunii dintre fluxurile convective, fluxurile difuzive şi surse interne sau externe. *Raportul dintre cele două tipuri de fluxuri va determina caracterul eliptic, parabolic sau hiperbolic al modelului.*

Din punct de vedere fizic, modelele Dinamicii fluidelor descriu două tipuri de fenomene: fenomene de echilibru şi fenomene de propagare (transport). Vom prezenta în continuare elementele specifice celor două clase de fenomene, având în vedere implicaţiile asupra formulării corecte a unui model matematic.

1.2.1. Fenomene de echilibru

Fenomenele de echilibru sunt descrise de o ecuaţie (sau sistem de ecuaţii) cu derivate parţiale pe un domeniu închis, având asociate un set de condiţii la limită specifice pe frontiera acestuia (fig. 1.1). Problemele de echilibru sunt numite şi *probleme de domeniu*, deoarece soluţia în interiorul domeniului depinde de condiţiile la limită pe frontiera acestuia. Orice punct de pe frontieră va influenţa toate punctele din interiorul domeniului. Pentru ca informaţia de la frontieră să fie recepţionată în toate punctele interioare, este necesar ca orice punct interior să influenţeze toate celelalte puncte interioare, sau, invers, un punct interior să fie influenţat de orice alt punct.

Vom denumi *domeniu de dependenţă fizică* a unui punct oarecare, domeniul format de mulţimea punctelor care influenţează punctul dat. Invers, *domeniul de influenţă fizică* a unui punct reprezintă mulţimea punctelor influenţate de punctul dat. Pentru fenomenele de echilibru, domeniul de dependenţă fizică al unui punct arbitrar este identic cu domeniul de influenţă fizică şi identic cu domeniul de analiză. Din categoria fenomenelor de echilibru de interes în mecanica mediilor continue putem cita: curgerile potenţiale subsonice şi staţionare, transferul termic conductiv în solide, echilibrul tensiunilor elastice în corpurile rigide etc.

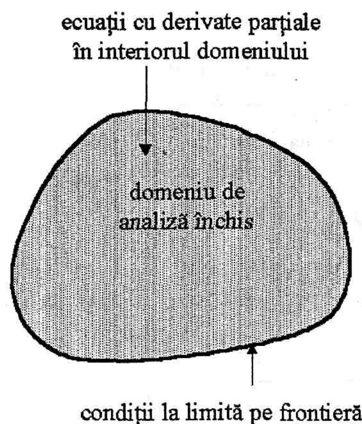


Fig. 1.1. Formularea unei probleme de echilibru.

Din punct de vedere matematic, fenomenele de echilibru sunt fenomene staţionare, descrise de ecuaţii diferenţiale de tip eliptic. De remarcat faptul că nu toate fenomenele staţionare sunt în acelaşi timp şi probleme de domeniu (eliptice). Spre exemplu, curgerea potenţială staţionară în regim supersonic este de tip hiperbolic; mişcarea în stratul limită staţionar este de tip parabolic.

1.2.2. Fenomene de propagare

Fenomenele de propagare (sau transport) sunt descrise de ecuaţii cu derivate parţiale pe un domeniu deschis având asociate un set de condiţii iniţiale şi la limită (fig. 1.2).

Domeniul de analiză, deşi poate fi mărginit în timp şi spaţiu, este *deschis,* deoarece există *porţiuni libere ale frontierei*, în sensul că, pe acestea nu trebuie impuse condiţii la limită. Valorile necunoscutelor pe frontierele libere sunt determinate de modul cum se dezvoltă soluţia în interiorul domeniului. Analiza unui fenomen de transport presupune: cunoaşterea stării iniţiale (condiţiile de start) şi/sau a unor condiţii la limită pe o serie de segmente ale frontierei. Soluţia se va determina în punctele din interiorul domeniului, prin integrarea ecuaţiilor cu derivate parţiale, pornind de la condiţiile iniţiale (sau din secţiunea de start), parcurgându-l în sensul impus de fenomenul de transport şi, impunând condiţiile la limită corespunzătoare.

Din punct de vedere matematic, fenomenele de propagare sunt reprezentate prin ecuaţii şi sisteme de tip parabolic şi hiperbolic. Pentru fenomenele de propagare, domeniile fizice de dependenţă şi, respectiv, influenţă, ale unui punct arbitrar nu mai sunt identice cu domeniul de calcul; ele vor fi reprezentate de subdomenii închise de o serie de *suprafeţe* sau curbe *caracteristice*, în funcţie de dimensiunea spaţială a problemei şi în funcţie de direcţia şi sensul de propagare.

Fenomenele de transport sunt *fenomene nestaţionare* (sau *tranzitorii*), caz în care direcţia de dezvoltare a soluţiei este timpul. Există însă şi modele staţionare în care soluţia se dezvoltă preferenţial în anumite direcţii. Am citat deja mai sus problema stratului limită staţionar şi modelul potenţial staţionar în regim supersonic. Pentru astfel de probleme, specificarea condiţiilor la limită impune o analiză a propagării informaţiei într-un hiperspaţiu spaţiu-timp.

1.2.3. Ecuaţii model în dinamica fluidelor

Mişcarea fluidelor poate fi considerată ca un proces extrem de complex în care coexistă şi interacţionează diverse fenomene fizice, fiecare dintre acestea caracterizându-se prin mecanisme specifice. Mecanismele prin care un anumit fenomen apare şi se dezvoltă sunt reflectate printr-o serie de mărimi specifice, numite scări (scări de lungimi, de viteze şi de timp). Dacă *scările de timp* ale diverselor procese fizice au acelaşi ordin de mărime, atunci acestea vor interacţiona între ele, fiind prezente simultan în ecuaţiile care descriu fenomenul respectiv.

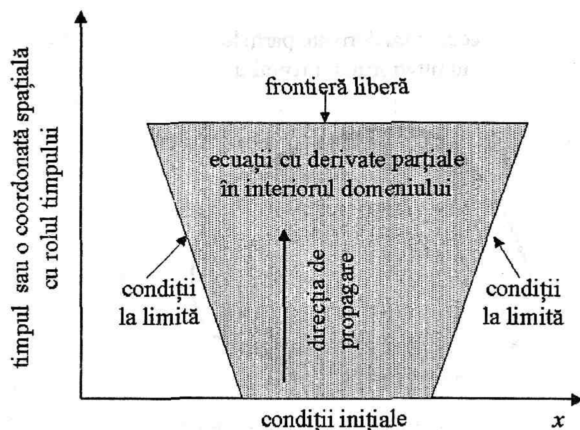


Fig. 1.2. Formularea unei probleme de propagare.

Mişcarea unui fluid este rezultatul unor interacţiuni complexe între procesele de transport convectiv, de difuzie vâscoasă şi de difuzie turbulentă la care se adaugă efectul „surselor" de impuls şi energie. Complexitatea proceselor fizice de bază, dar mai ales complexitatea interacţiunilor dintre acestea, conduc la modele matematice diferenţiale cu derivate parţiale neliniare, cu structuri foarte complicate. Integrarea acestora *se face în funcţie de proprietăţile lor matematice.* Este deci utilă analiza proprietăţilor matematice, pe modele matematice mai simple, care să aproximeze, la un anumit nivel de precizie, fie fenomenul mişcării unui fluid, fie un anumit proces fizic ce intervine în acest fenomen.

Din punct de vedere numeric, ecuaţiile model servesc la conceperea şi dezvoltarea unor tipuri de scheme de discretizare care să fie în concordanţă cu proprietăţile fizice ale procesului sau fenomenului analizat. Ecuaţiile model simple se dovedesc foarte utile şi sub aspectul *probării directe* a convergenţei diverşilor algoritmi numerici, deoarece pentru multe dintre aceste modele se cunoaşte soluţia exactă. Dintre ecuaţiile model cu relevanţă în mecanica mediilor continue şi, în particular, în dinamica fluidelor, menţionăm:

1. **Ecuaţia liniară de transport convectiv**. Transportul convectiv al mărimii scalare u, cu viteza constantă a, este descris de ecuaţia:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const.}. \tag{1.1}$$

Această ecuaţie, în mecanica mediilor continue, modelează propagarea cu viteza constantă, a, a *undelor unidimensionale*.

În dinamica fluidelor, ecuaţia (1.1) modelează transportul convectiv al unui scalar pasiv, spre exemplu, termenul de transport al temperaturii din ecuaţia energiei într-o curgere incompresibilă (în meteorologie ea este cunoscută sub denumirea de ecuaţie de *advecţie*). Aceasta serveşte, de asemenea, ca model liniar (sau liniarizat) pentru termenii de transport convectiv din ecuaţiile Euler ale fluidului perfect.

2. **Ecuaţia de difuzie**. Difuzia scalarului u, sub efectul unei „difuzivităţi", α, este reprezentată matematic de ecuaţia:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.2}$$

Această ecuaţie modelează fenomene pur difuzive, care se petrec la scară submacroscopică. În mecanica mediilor continue aceste fenomene sunt reprezentate, la scara macroscopică, prin *relaţii constitutive, empirice*, cum ar fi legile Fourier, Fick, pentru transferul de căldură şi masă, şi ipotezele Stokes în dinamica fluidelor.

Ecuaţia (1.2) este numită *ecuaţia conducţiei termice nestaţionare* şi unidimensionale în transferul de căldură. În dinamica fluidelor, aceasta este modelul pentru mişcarea pur difuzivă a unui fluid, fenomen care se petrece la numere Reynolds tinzând către zero (mişcare de tip Stokes). Spre exemplu, dezvoltarea stratului limită impulsiv pe o placă plană este modelată de o ecuaţie de acest tip.

3. **Ecuaţia de conservare neliniară**. Modelul neliniar cel mai simplu pentru *legile de conservare,* în care sunt exprimate ecuaţiile generale ce descriu mişcarea fluidelor, are forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0. \tag{1.3}$$

Funcţia f poartă numele de flux al scalarului u. Pentru a avea relevanţă fizică în modelarea formării şi propagării discontinuităţilor (unde de şoc sau expansiune), fluxul se presupune a fi o funcţie convexă, adică satisface condiţia:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} > 0. \tag{1.4}$$

În particular, dacă:

$$f(u) = \frac{u^2}{2}, \tag{1.5}$$

se obţine *ecuaţia Burgers nevâscoasă:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.6}$$

care reprezintă un model neliniar unidimensional pentru *ecuaţiile Euler*, fără gradient de presiune.

4. **Ecuaţia liniară de difuzie-convecţie**. Modelul liniar pentru studiul interacţiunilor dintre transportul scalarului pasiv u cu viteza constantă a şi difuzia acestuia sub efectul unei „vâscozităţi moleculare" ν este:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.7}$$

Deoarece transportul convectiv este un proces *orientat spaţial,* iar difuzia moleculară un proces *simetric* în spaţiu, modelul (1.7) este util în analiza relaţiei *simetric-disimetric* în propagarea informaţiei. De remarcat faptul că această ecuaţie constituie cel mai simplu model pentru ecuaţiile Navier-Stokes.

5. **Ecuaţia de conservare cu vâscozitate**. Modelul neliniar al combinaţiei dintre procesul de transport convectiv şi cel de difuzie vâscoasă, constituind o aproximaţie unidimensională a ecuaţiilor Navier-Stokes fără termen sursă (gradient nul de presiune), are forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1.8}$$

Dacă fluxul $f(u)$ este luat de forma (1.5) atunci se obţine *ecuaţia Burgers. Ecuaţia completă Burgers*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.9}$$

este o ecuaţie de tip parabolic, care poate servi ca model al ecuaţiilor stratului limită sau al ecuaţiilor parabolizate Navier-Stokes, şi chiar al ecuaţiilor complete Navier-Stokes.

Acest model neliniar permite studiul interacţiunilor dintre procesul de difuzie şi cel de convecţie. El permite totodată o analiză comparativă între difuzia moleculară şi cea *artificială,* care apare inerent într-o discretizare corectă a termenului de convecţie.

6. **Ecuaţia undelor**. Ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.10}$$

reprezintă modelul pentru propagarea simetrică în spaţiu a undelor unidimensionale. Deşi ecuaţiile (1.1) şi (1.10) sunt cunoscute practic sub aceeaşi denumire de „ecuaţii ale undelor unidimensionale", între cele două ecuaţii există diferenţe fundamentale. Astfel, undele descrise de (1.1) se propagă în spaţiu într-un *sens impus de semnul vitezei a*, pe când undele descrise de (1.10) se propagă simetric (atât în sensul pozitiv, cât şi în cel negativ al axei x). Observând că ecuaţia (1.10) se poate scrie astfel:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \tag{1.11}$$

putem interpreta unda descrisă de aceasta ca o combinaţie între două unde de tipul (1.1), una ce se propagă în sens pozitiv şi cealaltă în sens negativ, ambele având acelaşi modul al vitezei de propagare.

În dinamica fluidelor, ecuaţia (1.10) modelează propagarea undelor acustice (de presiune). De exemplu, *potenţialul de perturbaţie* într-o mişcare nestaţionară satisface o ecuaţie de acest tip. În mecanică, ecuaţia (1.10) este cunoscută ca *ecuaţia coardei vibrante.*

7. **Ecuaţia Laplace generalizată.** Ecuaţia Laplace generalizată este modelul pentru o serie de fenomene de echilibru din mecanica mediilor continue: transferul conductiv de căldură în solide în regim staţionar, mişcări potenţiale incompresibile, distribuţia presiunilor (ecuaţia Reynolds) în problemele de lubrificaţie hidrodinamică etc. Forma generală a ecuaţiei Laplace este:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0, \tag{1.12}$$

unde $k(x,y,z)$ este o funcţie dată, pozitivă. În particular, pentru $k=\text{const.}\neq 0$, se obţine ecuaţia Laplace clasică:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1.13}$$

8. **Ecuaţia Prandtl-Glauert** se regăseşte în aerodinamica liniară (modelul potenţialului de perturbaţie în regim supersonic) şi are forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1.14}$$

9. **Ecuaţia Poisson generalizată.** Aceasta este:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f\left(x,y,z\right), \tag{1.15}$$

şi reprezintă, în esenţă, o ecuaţie Laplace completată cu termenul sursă, $f\left(x,y,z\right)$. Ea modelează transferul de căldură în solide cu surse interne de căldură în regim staţionar, sau intensitatea câmpului electric într-un domeniu cu densitatea de sarcină $f\left(x,y,z\right)$.

10. **Ecuaţia Helmholtz.** Modelul care guvernează distribuţia spaţială a amplitudinii undelor armonice, caz în care k reprezintă frecvenţa acestor unde, este:

$$\Delta u+k^2 u=0. \tag{1.16}$$

Într-adevăr, dacă în ecuaţia undelor (1.10) considerăm cazul *oscilaţiilor armonice*:

$$u=\hat{u}\left(x\right)\mathrm{e}^{ikt}, \tag{1.17}$$

în care $\hat{u}(x)$ reprezintă amplitudinea complexă a undei, iar ω pulsaţia acesteia, vom obţine:

$$-k^2\hat{u}=\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}. \tag{1.18}$$

Evident, în cazul tridimensional se obţine o ecuaţie de tipul (1.16). Putem concluziona că fenomenele fizice modelate de ecuaţia Helmholtz sunt aceleaşi cu cele modelate prin ecuaţia undelor, introducând suplimentar ipoteza oscilaţiilor armonice. Aplicaţiile curente vizează problema propagării undelor acustice sau a mişcării oscilatorii armonice nestaţionare, în ipoteza micilor perturbaţii.

1.3. ECUAŢII LINIARE DE ORDINUL ÎNTÂI

Vom prezenta în cele ce urmează cele mai importante proprietăţi matematice ale ecuaţiilor şi sistemelor cu derivate parţiale care sunt de interes în dinamica fluidelor. S-a preferat clasificarea matematică pe baza caracteristicilor, metodă pe care o considerăm cea mai semnificativă în contextul analizei numerice ulterioare. Deşi, de regulă, prezentarea clasificării matematice se face având ca punct de referinţă teoria ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale de ordin doi în două variabile, am preferat o analiză pe modelele cu derivate parţiale cu relevanţă în dinamica fluidelor, care să permită ulterior o aplicare directă la modelele matematice complete din acest domeniu.

O dezvoltare corespunzătoare se va da analizei proprietăţilor ecuaţiilor şi sistemelor diferenţiale neliniare de tip hiperbolic. Prezentarea se va face în strânsă corelaţie cu modelele neliniare ale dinamicii fluidelor, modelul Euler şi modelul Navier-Stokes. Astfel, se vor defini o serie de noţiuni de bază în teoria ecuaţiilor hiperbolice neliniare, cum ar fi: soluţia slabă, unicitatea soluţiei slabe, condiţia de entropie, relaţiile Hugoniot-Rankine, formarea undelor de şoc, unde simple etc. Ca aplicaţie concretă am ales ecuaţia Burgers nevâscoasă, care îşi va dovedi utilitatea în dezvoltarea algoritmilor numerici dedicaţi integrării ecuaţiilor hiperbolice neliniare.

1.3.1. Ecuaţia liniară de transport convectiv unidimensional

Modelul matematic cel mai simplu pentru fenomenul de transport convectiv este reprezentat de ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi, de forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1.19}$$

unde $a =$ const. reprezintă viteza de transport.

Condiţia iniţială asociată acestei ecuaţii este:

$$t = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{1.20}$$

Ecuaţia (1.19) este de *tip hiperbolic,* iar soluţia ei generală este:

$$u(x,t) = f(x - at), \tag{1.21}$$

unde f este o funcţie arbitrară de clasă C^1 (derivabilă şi cu derivata continuă). Pentru a specifica funcţia f, se va impune condiţia iniţială (1.20):

$$t = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) = f(x), \tag{1.22}$$

şi se obţine soluţia:

$$u(x,t) = u_0(x - at). \tag{1.23}$$

Observaţii. 1) Soluţia (1.23) depinde în mod continuu de condiţia iniţială.

2) Relaţia (1.23) pune în evidenţă conservarea mărimii u în lungul unor drepte în hiperspaţiul (x,t), definite de:

$$x - at = \text{const.}, \tag{1.24}$$

care poartă numele de *caracteristici.*

Aceeaşi concluzie se poate obţine şi din analiza ecuaţiei diferenţiale (1.19). Astfel, se cunoaşte că *derivata totală* a unei funcţii $f(x,y,z,t)$ în lungul unei suprafeţe $S(\boldsymbol{x}_s,t) =$ const. este dată de ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\boldsymbol{C}\nabla)\, f, \tag{1.25}$$

unde $\boldsymbol{C}$ este viteza locală a suprafeţei S, $\boldsymbol{C}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}_s/\mathrm{d}t$. Deci ecuaţia (1.19) poate fi privită ca derivata totală a mărimii u în lungul unei drepte $S(x,t) =$ const., având viteza:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a, \tag{1.26}$$

şi poate fi rescrisă sub forma unei ecuaţii diferenţiale ordinare:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.27}$$

care pune în evidenţă din nou *conservarea mărimii u în lungul unei caracteristici* definite de relaţia (1.26). Integrând ecuaţia diferenţială (1.26), obţinem:

$$S(x,t) = x - at = \text{const.}, \tag{1.28}$$

iar, din ecuaţia (1.27), rezultă, având în vedere şi condiţia iniţială (1.20):

$$u\,[S(x,t)] = \text{const.}, \quad u(x,t) = u_0(x - at). \tag{1.29}$$

O dezvoltare corespunzătoare se va da analizei proprietăţilor ecuaţiilor şi sistemelor diferenţiale neliniare de tip hiperbolic. Prezentarea se va face în strânsă corelaţie cu modelele neliniare ale dinamicii fluidelor, modelul Euler şi modelul Navier-Stokes. Astfel, se vor defini o serie de noţiuni de bază în teoria ecuaţiilor hiperbolice neliniare, cum ar fi: soluţia slabă, unicitatea soluţiei slabe, condiţia de entropie, relaţiile Hugoniot-Rankine, formarea undelor de şoc, unde simple etc. Ca aplicaţie concretă am ales ecuaţia Burgers nevâscoasă, care îşi va dovedi utilitatea în dezvoltarea algoritmilor numerici dedicaţi integrării ecuaţiilor hiperbolice neliniare.

1.3.1. Ecuaţia liniară de transport convectiv unidimensional

Modelul matematic cel mai simplu pentru fenomenul de transport convectiv este reprezentat de ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi, de forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1.19}$$

unde $a =$ const. reprezintă viteza de transport.

Condiţia iniţială asociată acestei ecuaţii este:

$$t = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{1.20}$$

Ecuaţia (1.19) este de *tip hiperbolic,* iar soluţia ei generală este:

$$u(x,t) = f(x - at), \tag{1.21}$$

unde f este o funcţie arbitrară de clasă C^1 (derivabilă şi cu derivata continuă). Pentru a specifica funcţia f, se va impune condiţia iniţială (1.20):

$$t = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) = f(x), \tag{1.22}$$

şi se obţine soluţia:

$$u(x,t) = u_0(x - at). \tag{1.23}$$

Observaţii. 1) Soluţia (1.23) depinde în mod continuu de condiţia iniţială.

2) Relaţia (1.23) pune în evidenţă conservarea mărimii u în lungul unor drepte în hiperspaţiul (x,t), definite de:

$$x - at = \text{const.}, \tag{1.24}$$

care poartă numele de *caracteristici.*

Aceeaşi concluzie se poate obţine şi din analiza ecuaţiei diferenţiale (1.19). Astfel, se cunoaşte că *derivata totală* a unei funcţii $f(x,y,z,t)$ în lungul unei suprafeţe $S(\boldsymbol{x}_s,t) =$ const. este dată de ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\boldsymbol{C}\nabla)\, f, \tag{1.25}$$

unde $\boldsymbol{C}$ este viteza locală a suprafeţei S, $\boldsymbol{C}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}_s/\mathrm{d}t$. Deci ecuaţia (1.19) poate fi privită ca derivata totală a mărimii u în lungul unei drepte $S(x,t) =$ const., având viteza:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a, \tag{1.26}$$

şi poate fi rescrisă sub forma unei ecuaţii diferenţiale ordinare:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.27}$$

care pune în evidenţă din nou *conservarea mărimii u în lungul unei caracteristici* definite de relaţia (1.26). Integrând ecuaţia diferenţială (1.26), obţinem:

$$S(x,t) = x - at = \text{const.}, \tag{1.28}$$

iar, din ecuaţia (1.27), rezultă, având în vedere şi condiţia iniţială (1.20):

$$u\,[S(x,t)] = \text{const.}, \quad u(x,t) = u_0(x - at). \tag{1.29}$$

Deşi rezultatul analitic este evident acelaşi, vom observa totuşi că, din ecuaţia (1.27), putem să desprindem concluzii foarte utile:

a) din punct de vedere matematic: *prin proiectarea ecuaţiei hiperbolice pe suprafeţele caracteristice se pot pune în evidenţă o serie de proprietăţi de conservativitate;*

b) din punct de vedere numeric: *ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale* (1.19) *poate fi integrată ca o ecuaţie diferenţială ordinară într-o grilă de calcul definită de curbele caracteristice* $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a$.

3) În final, putem să facem o analiză Fourier a ecuaţiei (1.19), posibilitate sugerată de caracterul conservativ al mărimii u în lungul caracteristicilor.

Conform definiţiei, *transformata Fourier pe continuu* a funcţiei $u(x,t)$ este (Şabac, [258]):

$$\hat{u}(k,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \underset{\text{notaţie}}{=} F(u), \tag{1.30}$$

având proprietăţile:

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mathrm{i}k\hat{u}, \quad F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\mathrm{i}\omega\hat{u}, \tag{1.31}$$

unde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Aplicând transformata Fourier ecuaţiei (1.19) vom obţine *ecuaţia omogenă*:

$$(-\omega + ka)\,\hat{u} = 0, \tag{1.32}$$

iar *condiţia de existenţă a unei soluţii nebanale* conduce la *ecuaţia caracteristică*:

$$\omega = ka. \tag{1.33}$$

Soluţia $u(x,t)$ se va obţine aplicând *transformata Fourier inversă*:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\mathrm{d}k, \tag{1.34}$$

unde amplitudinile $\hat{u}(k)$ se găsesc din condiţia iniţială:

$$u(x,0) = u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \rightarrow \hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x. \tag{1.35}$$

Înlocuind (1.35) în expresia soluţiei generale (1.34), rezultă:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\mathrm{d}k\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat}\mathrm{d}k = u_0(x-at). \tag{1.36}$$

Din punct de vedere teoretic şi numeric este mult mai util să considerăm *transformata Fourier discretă* (Fletcher, [104]). În această situaţie, se va considera soluţia descompusă *într-o serie Fourier* de forma:

$$u(x,t) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \hat{u}_{ij}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_j t}. \tag{1.37}$$

Bazându-ne pe liniaritatea ecuaţiei, vom considera doar *o armonică* din seria de mai sus:

$$u(x,t) = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}. \tag{1.38}$$

Soluţia de forma (1.38) poate fi interpretată ca o undă având amplitudinea complexă $\hat{u}$, numărul de undă k şi pulsaţia ω. Introducând *unda* (1.38) în ecuaţia (1.19), obţinem ecuaţia de *valori proprii* (1.32), care pune în evidenţă legătura dintre numărul de undă k şi pulsaţia ω.

Soluţia (1.38) devine:

$$u(x,t) = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}. \tag{1.39}$$

Pentru determinarea amplitudinii $\hat{u}$ vom impune condiţia iniţială:

$$u(x,0) = u_0(x) = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \tag{1.40}$$

de unde rezultă:

$$\hat{u} = u_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}. \tag{1.41}$$

Se pune astfel în evidenţă că: *dacă se consideră o descompunere Fourier (sau în unde simple) a condiţiei iniţiale, evidenţiată de relaţia* (1.41), *determinarea soluţiei ecuaţiei hiperbolice* (1.19) *poate fi asimilată cu analiza propagării acestor unde pe direcţiile caracteristice date de ecuaţia caracteristică* (1.32). Defazajul undei este $\phi = at$, de unde rezultă că *a poate fi interpretat ca fiind viteza de fază a undei elementare.*

Concluzii. Analiza Fourier permite:

a) punerea în evidenţă a direcţiilor caracteristice ca o condiţie a existenţei unei descompuneri a soluţiei în unde simple;

b) introducerea conceptului de propagare (sau transport) a unor unde simple în lungul direcţiilor caracteristice, concept foarte apropiat de semnificaţia fizică a ecuaţiei diferenţiale; reamintim că, din punct de vedere fizic, ecuaţia (1.19) reprezintă transportul convectiv al mărimii scalare u cu o viteză de convecţie constantă $\boldsymbol{a}$;

c) introducerea conceptului de reconstrucţie a soluţiei unei ecuaţii diferenţiale prin suprapunerea unor undelor simple;

d) extinderea directă pentru cazul multidimensional sau pentru sisteme diferenţiale cu derivate parţiale.

1.3.2. Ecuaţia liniară de transport convectiv multidimensional

Fie ecuaţia de transport a mărimii scalare $u(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{a}\nabla u = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \tag{1.42}$$

unde:

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial .}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial .}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial .}{\partial z}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{1.43}$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ fiind versorii direcţiilor carteziene x, y, z. Condiţia iniţială asociată ecuaţiei (1.42) este:

$$t = 0, \quad u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z). \tag{1.44}$$

Vom aplica *analiza Fourier* pentru studiul soluţionării acestei ecuaţii, deoarece constituie un exemplu foarte util pentru generalizarea metodei de la cazul unidimensional la cel multidimensional. Soluţia $u(x, y, z, t)$ se consideră de forma unei unde:

$$u(x, y, z, t) = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(d_x x + d_y y + d_z z - \omega t)} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} - \omega t)}, \tag{1.45}$$

unde ω este pulsaţia, iar d_x, d_y, d_z reprezintă numerele de undă asociate direcţiilor carteziene. Am introdus mai sus vectorul de undă $\boldsymbol{d}$ şi vectorul de poziţie $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{d} = d_x\boldsymbol{i} + d_y\boldsymbol{j} + d_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1.46}$$

Înlocuind (1.45) în ecuaţia (1.42), se obţine ecuaţia omogenă:

$$(-\omega + \boldsymbol{d}\boldsymbol{a})\,\hat{u} = 0, \tag{1.47}$$

şi, din condiţia de soluţie nebanală pentru ecuaţia de mai sus, *ecuaţia caracteristică*:

$$\omega = \boldsymbol{d}\boldsymbol{a}, \tag{1.48}$$

care pune în evidenţă *caracterul hiperbolic* al ecuaţiei considerate. Soluţia corespunzătoare undei elementare se poate scrie sub forma:

$$u(x, y, z, t) = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}t)}. \tag{1.49}$$

Pentru determinarea amplitudinii $\hat{u}$ vom impune condiţia iniţială (1.44):

$$\hat{u} = u_0(x, y, z)e^{-i\boldsymbol{da}}. \tag{1.50}$$

Concluziile pe care le-am prezentat anterior pentru cazul unidimensional rămân în continuare valabile şi la cazul tridimensional. Astfel, se constată că unda care se propagă în direcţia $\boldsymbol{d}$ are viteza de fază $\boldsymbol{a}$. De asemenea, vom remarca faptul că, ţinând seamă de definiţia derivatei în lungul unei suprafeţe (1.25), putem să considerăm ecuaţia (1.42) de forma:

$$\frac{du}{dt} = 0, \tag{1.51}$$

în lungul *suprafeţei caracteristice* $S(\boldsymbol{x}_s, t) = \text{const.}$, definită de ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d\boldsymbol{x}_s}{dt} = \boldsymbol{a}. \tag{1.52}$$

Integrând această ecuaţie, obţinem reprezentarea parametrică a suprafeţei caracteristice:

$$\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{a}(t - t_P) + \boldsymbol{x}_P, \tag{1.53}$$

unde $\boldsymbol{x}_P$ şi t_P reprezintă coordonatele punctului arbitrar $P(\boldsymbol{x}_P, t_P)$ din hiperspaţiul (x, y, z, t). Din relaţia (1.48) este evident că produsul scalar între vectorul $(\boldsymbol{d}, -\omega)$ şi vectorul $(\boldsymbol{a}, 1)$ este nul, ceea ce pune în evidenţă ortogonalitatea acestora.

1.4. SISTEME LINIARE DE ORDINUL ÎNTÂI

Fie *partea omogenă* a unui sistem diferenţial cu derivate parţiale de ordinul întâi:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = 0, \tag{1.54}$$

unde *vectorul necunoscută este*:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{array}\right]^T, \tag{1.55}$$

iar *matricele constante* $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{A}_z$ *sunt matrice pătrate de dimensiune* $(m \times m)$. Condiţiile iniţiale asociate sistemului sunt:

$$t = 0, \quad \mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{U}_0(x, y, z). \tag{1.56}$$

Dacă vom defini:

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{A}_x \boldsymbol{i} + \mathbf{A}_y \boldsymbol{j} + \mathbf{A}_z \boldsymbol{k}, \tag{1.57}$$

atunci sistemul (1.54) poate fi scris sub forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{A}\nabla)\,\mathbf{U} = 0. \tag{1.58}$$

Din punct de vedere matematic şi numeric, cea mai utilă metodă de analiză a tipului sistemului diferenţial are la bază *analiza Fourier,* care se pretează la interpretări fizice directe prin noţiunile de *suprafaţă caracteristică şi propagare a undelor simple.*

Astfel, se caută *soluţia acestui sistem de forma unei unde plane* (1.45):

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} e^{i(d_x x + d_y y + d_z z - \omega t)} = \hat{\mathbf{U}} e^{i(\boldsymbol{da} - \omega t)}, \tag{1.59}$$

unde:

$$\hat{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{cccc} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \dots & \hat{u}_m \end{array}\right]^T, \tag{1.60}$$

reprezintă *vectorul amplitudinilor complexe* (sau, simplu, *amplitudinea complexă*).

Pulsaţia undei este ω, iar d_x, d_y, d_z reprezintă *numerele de undă* asociate direcţiilor spaţiale sau componentele *vectorului de undă* $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{d} = d_x \boldsymbol{i} + d_y \boldsymbol{j} + d_z \boldsymbol{k}. \tag{1.61}$$

Introducând relaţia (1.60) în sistemul (1.55), se obţine *sistemul omogen* pentru amplitudinea complexă:

$$(d_x\mathbf{A}_x + d_y\mathbf{A}_y + d_z\mathbf{A}_z - \omega\mathbf{I})\,\hat{\mathbf{U}} = 0, \tag{1.62}$$

unde $\mathbf{I}$ reprezintă *matricea unitate* de ordinul m.

Condiţia ca acest sistem să admită o soluţie diferită de soluţia banală este:

$$\det(d_x\mathbf{A}_x + d_y\mathbf{A}_y + d_z\mathbf{A}_z - \omega\mathbf{I}) = 0. \tag{1.63}$$

Ecuaţia (1.63) poartă numele de *ecuaţie caracteristică* a sistemului diferenţial şi poate fi interpretată ca o relaţie de legătură între parametrii ω, d_x, d_y, şi d_z ai undei. Această legătură poate fi considerată şi ca o ecuaţie algebrică pentru una din variabilele menţionate, celelalte trei fiind considerate ca parametri. De regulă, se consideră date componentele d_x, d_y, şi d_z ale vectorului de undă $\boldsymbol{d}$, iar relaţia (1.63) devine o ecuaţie algebrică de ordinul m în necunoscuta ω.

În cazul staţionar, ($\dfrac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} = 0$), se poate admite, în continuare, soluţia sub forma undei (1.59), dar luând $\omega = 0$. În aceste condiţii sistemul omogen pentru amplitudini devine:

$$(d_x\mathbf{A}_x + d_y\mathbf{A}_y + d_z\mathbf{A}_z)\,\hat{\mathbf{U}} = 0, \tag{1.64}$$

iar ecuaţia caracteristică se scrie:

$$\det(d_x\mathbf{A}_x + d_y\mathbf{A}_y + d_z\mathbf{A}_z) = 0. \tag{1.65}$$

Două componente ale vectorului de undă $\boldsymbol{d}$ vor fi asimilate ca parametri, urmând ca cea de-a treia să se determine funcţie de acestea.

Clasificarea sistemelor diferenţiale se face funcţie de rădăcinile ecuaţiei caracteristice (Hirsch 1990, [139]). Astfel, sistemul este:

– de tip *hiperbolic*, dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale şi distincte;
– de tip *hiperbolic sau parabolic*, dacă toate rădăcinile sunt reale, dar există şi rădăcini multiple;
– de tip *eliptic*, dacă toate rădăcinile sunt complex conjugate;
– tip *hibrid*, dacă există şi rădăcini reale şi rădăcini complex conjugate.

Se poate constata că o clasificare completă a sistemelor diferenţiale nu se poate face doar după rădăcinile ecuaţiei caracteristice, deoarece, în cazul rădăcinilor multiple, nu există un criteriu de delimi-
tare între tipul hiperbolic şi tipul parabolic. Deşi în ambele situaţii soluţia sistemului diferenţial este de tip undă, între cazul hiperbolic şi cel parabolic există diferenţe notabile. Astfel, undele asociate sistemelor hiperbolice sunt neamortizate, pe când cele asociate sistemelor parabolice sunt amortizate. De asemenea, domeniul fizic de dependenţă al sistemelor parabolice este mult mai extins decât cel al sistemelor hiperbolice.

O formulare echivalentă, care să facă posibilă clasificarea completă a sistemelor diferenţiale este bazată pe transformarea sistemului omogen (1.62) într-o *problemă de valori şi vectori proprii*. Astfel, să observăm că relaţia matriceală (1.62) poate fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{U}} = \lambda\hat{\mathbf{U}}, \tag{1.66}$$

unde matricea $\mathbf{K}$ este:

$$\mathbf{K} = d_x\mathbf{A}_x + d_y\mathbf{A}_y + d_z\mathbf{A}_z, \tag{1.67}$$

iar $\lambda = \omega$ are semnificaţia de valori proprii ale matricei $\mathbf{K}$. În cazul staţionar, se poate formula o problemă de valori proprii analogă doar dacă una din matricele $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ sau $\mathbf{A}_z$ este nesingulară. Să presupunem că $\det(\mathbf{A}_x) \neq 0$. Putem deci înmulţi la stânga sistemul (1.64) cu inversa matricei $\mathbf{A}_x$ şi, după rearanjare, obţinem acelaşi sistem de valori proprii (1.66), unde:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_x^{-1}\left(d_y\mathbf{A}_y + d_z\mathbf{A}_z\right). \tag{1.68}$$

Valorile proprii ale matricei $\mathbf{K}$ sunt $\lambda = -d_x$.

Pe baza valorilor şi vectorilor proprii ale matricei $\mathbf{K}$, sistemele diferenţiale pot fi clasificate, după cum urmează:

– de tip *hiperbolic*, când toate valorile proprii ale matricei $\mathbf{K}$ sunt reale, iar vectorii proprii corespunzători sunt liniar independenţi;

– de tip *parabolic*, dacă toate valorile proprii sunt reale, dar vectorii proprii nu sunt liniar independenţi;

– de tip *eliptic*, când toate valorile proprii sunt complex conjugate;

– de tip *hibrid*, în cazul în care un număr de valori proprii sunt reale, dar există şi valori proprii complexe conjugate.

1.5. SISTEME HIPERBOLICE LINIARE

În cazul hiperbolic, deoarece vectorii proprii sunt liniar independenţi, *matricea* $\mathbf{K}$ *se poate diagonaliza.* Într-adevăr, dacă vom nota cu $\mathbf{r}^{(i)}$ vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ_i, $i = 1, 2, ..., m$, putem construi o matrice $\mathbf{R}$ ale cărei coloane sunt vectorii proprii ai matricei $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{R} = \left[\ \mathbf{r}^{(1)} \quad \mathbf{r}^{(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{r}^{(m)}\ \right]. \tag{1.69}$$

Coloanele matricei $\mathbf{R}$ fiind liniar independente, matricea este nesingulară, şi au loc relaţiile:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{R}, \text{ sau } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}, \tag{1.70}$$

unde $\mathbf{\Lambda}$ este matricea diagonală a valorilor proprii λ_i, $i = 1, 2, ..., m$:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}. \tag{1.71}$$

Relaţiile (1.70) pot fi interpretate ca o proiecţie a matricei $\mathbf{K}$ în baza reprezentată de vectorii proprii. Putem deci să ne punem problema proiectării, în această bază, a sistemului diferenţial (1.58). Astfel, înmulţind la stânga egalităţii cu $\mathbf{R}^{-1}$, sistemul (1.58) devine:

$$\mathbf{R}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left[\left(\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{R}\right)\mathbf{R}^{-1}\nabla\right]\mathbf{U} = 0. \tag{1.72}$$

Cum $\mathbf{R}^{-1}$ este o *matrice constantă*, notând:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}, \tag{1.73}$$

sistemul (1.72) devine:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \left[\left(\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{R}\right)\nabla\right]\mathbf{W} = 0. \tag{1.74}$$

Vectorul $\mathbf{W}$ definit de (1.73) reprezintă *vectorul variabilelor caracteristice*, iar ecuaţiile (1.74) poartă numele de *relaţii de compatibilitate.* Acestea pot fi interpretate ca fiind proiecţia sistemului pe suprafeţele de undă $S(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{da} - \omega t =$ const..

Condiţiile iniţiale asociate sistemului (1.74) se obţin aplicând aceeaşi transformare relaţiei (1.56):

$$t = 0, \quad \mathbf{W}(x, y, z, 0) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_0(x, y, z) \underset{\text{notaţie}}{=} \mathbf{W}_0(x, y, z). \tag{1.75}$$

În general, matricea sistemului caracteristic, $\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{R}$, *nu este o matrice diagonală* deoarece matricea vectorilor proprii $\mathbf{R}$ diagonalizează matricea $\mathbf{K}$ (1.70), care reprezintă o combinaţie liniară a matricelor $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{A}_z$.

Pentru ca matricea $\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{R}$ să fie diagonală, ar trebui ca matricea $\mathbf{R}$ să diagonalizeze fiecare dintre matricele $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ sau $\mathbf{A}_z$, ceea ce nu este posibil. Într-un singur caz matricea $\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{R}$ este diagonală, şi anume în cazul unidimensional.

Odată determinate variabilele caracteristice w_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, din relaţiile de compatibilitate (1.74) se poate calcula vectorul necunoscută $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{RW}, \quad \mathbf{U} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{r}^{(i)} w_i. \tag{1.76}$$

Deoarece, în cazul hiperbolic, vectorii proprii $\mathbf{r}^{(i)}$, formează un sistem de vectori liniar independenţi, atunci ei pot fi consideraţi ca formând o bază în spaţiul vectorial de dimensiune m al necunoscutei $\mathbf{U}$.

Cum *orice vector din acest spaţiu poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară unică a vectorilor* $\mathbf{r}^{(i)}$, şi vectorul $\mathbf{U}$ admite o descompunere în această bază:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{r}^{(i)}. \tag{1.77}$$

Dacă vom compara relaţiile (1.76) şi (1.77) şi vom tine seama de observaţia privind *unicitatea* descompunerii unui vector într-o bază, putem să identificăm:

$$\alpha_i = w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.78}$$

În concluzie, un sistem hiperbolic admite o *soluţie de tip undă* (1.59). Aceasta poate fi considerată ca o combinaţie liniară de *unde simple* reprezentate de vectorii proprii $\mathbf{r}^{(i)}$ şi având amplitudinea dată de variabilele caracteristice w_i.

1.6. ECUAŢII NELINIARE DE ORDINUL ÎNTÂI

Fie ecuaţia diferenţială, formulată ca o *lege de conservare*, pentru necunoscuta scalară u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \tag{1.79}$$

având condiţia iniţială:

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{1.80}$$

În cele ce urmează, vom presupune că $f(u)$ este o *funcţie convexă* de variabila u, deci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} > 0. \tag{1.81}$$

Dacă u este *diferenţiabilă*, ecuaţia (1.79) poate fi *liniarizată local,* exprimând derivata fluxului f prin:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = a(u)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad a(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}. \tag{1.82}$$

Ipoteza făcută asupra convexităţii funcţiei $f(u)$ este echivalentă cu:

$$\frac{\partial a(u)}{\partial u} > 0. \tag{1.83}$$

Ecuaţia (1.79) poate fi rescrisă în *forma cvasiliniară*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.84}$$

care, analog ecuaţiei (1.19), poate fi interpretată ca o ecuaţie diferenţială ordinară:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.85}$$

în lungul *curbei caracteristice* de ecuaţie:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\left(u(x,t), t\right). \tag{1.86}$$

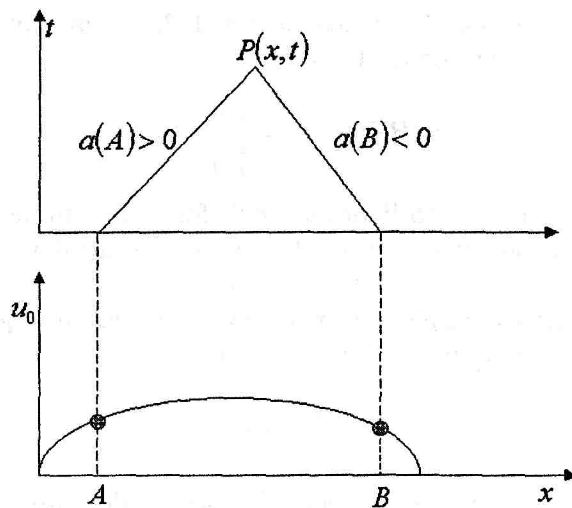


Fig. 1.3. Intersecţia caracteristicilor pentru ecuaţii scalare neliniare.

Soluţia ecuaţiei (1.84) este:

$$u\,(x(t), t) = u\,(x - at, 0) = u_0(x - at). \tag{1.87}$$

Caracteristicile definite de ecuaţia (1.85) reprezintă curbe în hiperspaţiul (x, t), în lungul cărora mărimea u se conservă. Diferenţa faţă de cazul liniar tratat anterior este aceea că panta la curba caracteristică nu mai este constantă. Apare deci posibilitatea ca aceste *curbe caracteristice să se intersecteze*, după cum este schiţat în fig. 1.3.

Fie, spre exemplu, la momentul iniţial, două puncte $A(x_1)$ şi $B(x_2)$, cu $x_1 < x_2$, în care are loc relaţia $a\,(u_0(x_1)) > a\,(u_0(x_2))$. În hiperspaţiul (x, t) va exista un punct P unde se vor intersecta caracteristicile ce trec prin punctele A şi, respectiv, B. Deoarece nu este evident ce valoare va avea funcţia u în punctul P, cea corespunzătoare caracteristicii ce trece prin punctul A sau cea corespunzătoare caracteristicii ce trece prin punctul B, vom examina mai în detaliu comportarea funcţiei u în acest punct.

După cum s-a arătat, soluţia exactă a ecuaţiei (1.84) la orice moment de timp este:

$$u(x, t) = u_0\left[x - a\,(u(x, t), t)\,t\right]. \tag{1.88}$$

Derivând în raport cu x obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0^{'}\left[1 - \frac{\partial a}{\partial x} t\right], \tag{1.89}$$

unde am notat $u_0^{'}$ derivata funcţiei u_0.

Dar, deoarece $a = a(u)$, rezultă:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.90}$$

Înlocuind în (1.89) obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0^{'}}{1 + t\dfrac{\partial a}{\partial u}u_0^{'}}. \tag{1.91}$$

Cum $\dfrac{\partial a}{\partial u} > 0$, (funcţia f a fost presupusă convexă), pentru valori $u_0^{'} < 0$, există posibilitatea ca numitorul membrului drept din relaţia (1.91) să se anuleze pentru o anumită valoare a timpului, t_c.

Într-adevăr, din (1.91), găsim:

$$t_c = -\frac{1}{\dfrac{\partial a}{\partial u}u_0^{'}}. \tag{1.92}$$

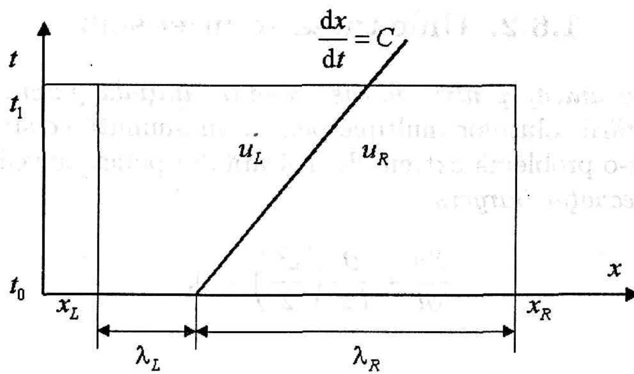


Fig. 1.4. Discontinuitate care se propaga cu viteza constanta C.

În aceasta situatie, *solutia nu mai este continua, ci sufera un salt, pe care, din punct de vedere fizic, îl interpretam ca fiind o unda de soc.* De mentionat faptul ca, la traversarea undei de soc, formularea cvasiliniara (1.84) nu mai are sens deoarece derivata $\partial u/\partial x$ nu mai este definita, pe când formularea conservativa (1.79) este în continuare valabila.

1.6.1. Soluții slabe

În situatia prezentata anterior, ramâne deschisa problema determinarii solutiei pentru $t > t_c$. În acest scop, vom introduce conceptul de *solutie slaba a unei ecuatii diferentiale neliniare.*

Solutia slaba a ecuatiei scalare neliniare (1.79) este solutia care satisface conditia (Colella si Puckett, [68]):

$$\int_{x_L}^{x_R} u(x,t_1)\mathrm{d}x = \int_{x_L}^{x_R} u(x,t_0)\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t_1} f(u\left(x_L\right),t)\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} f(u\left(x_R\right),t)\mathrm{d}t, \tag{1.93}$$

unde x_L si x_R definesc frontiera domeniului fizic ($x_L < x_R$), t_0 reprezinta momentul initial si $t_1 =$ $= t_0 + \Delta t$, ($\Delta t > 0$). Sa consideram cazul particular al unei solutii discontinue, cu o discontinuitate izolata care se propaga cu viteza $\boldsymbol{C}$. Urmarind fig. 1.4, vom evalua integralele din expresia (1.93):

$$\int_{x_L}^{x_R} \left[u(x,t_1) - u(x,t_0)\right]\mathrm{d}x = u_L\left(\lambda_L + C\Delta t\right) + u_R\left(\lambda_R - C\Delta t\right) - \left(u_L\lambda_L + u_R\lambda_R\right) = C\Delta t(u_L - u_R), \tag{1.94}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[f(u\left(x_L\right),t) - f(u\left(x_R\right),t)\right]\mathrm{d}t = \left[f(u_L) - f(u_R)\right]\Delta t. \tag{1.95}$$

Înlocuind valorile integralelor (1.94) si (1.95) în definitia (1.93), vom obtine C, viteza de propagare a discontinuitatii (relatia *Hugoniot-Rankine*):

$$C = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}. \tag{1.96}$$

Daca f este o functie neteda, atunci putem aplica teorema de medie care arata ca exista un punct u_ξ între u_L si u_R, astfel încât:

$$\frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} = \frac{\partial f}{\partial u}_{|u_\xi}. \tag{1.97}$$

Vom remarca, de asemenea, faptul ca, atunci când $u_L \to u_R$, din relatia (1.96) se obtine:

$$C = \lim_{u_L \to u_R} \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} = \frac{\partial f}{\partial u}_{|\frac{u_L+u_R}{2}} = a(\frac{u_L + u_R}{2}), \tag{1.98}$$

ceea ce probeaza faptul ca undele slabe se propaga în lungul caracteristicilor.

1.6.2. Unicitatea soluţiei slabe

Soluţia slabă nu este unică; pentru aceeaşi condiţie iniţială putem obţine mai multe soluţii slabe. Posibilitatea dezvoltării soluţiilor multiple pentru un anumită ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale se transformă într-o problemă extrem de delicată din punct de vedere numeric.

De exemplu, pentru *ecuaţia Burgers*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, \tag{1.99}$$

având condiţia iniţială:

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 \text{ pentru } x < 0, \\ \ \ 1 \text{ pentru } x > 0, \end{cases} \tag{1.100}$$

se poate verifica fără probleme că există două soluţii.

a) Soluţia corespunzătoare undei de şoc staţionare. Într-adevăr, la momentul iniţial t_0 şi în punctul $x = 0$, din relaţia (1.96) obţinem:

$$u_L = -1, \quad u_R = 1, \tag{1.101}$$

$$C = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} = \frac{\left(\frac{u_L}{2}\right)^2 - \left(\frac{u_R}{2}\right)^2}{u_L - u_R} = 0, \tag{1.102}$$

şi deci, pentru orice moment de timp, soluţia va fi:

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 \text{ pentru } x < 0, \\ \ \ 1 \text{ pentru } x > 0, \end{cases} \tag{1.103}$$

reprezentată în fig. 1.5.

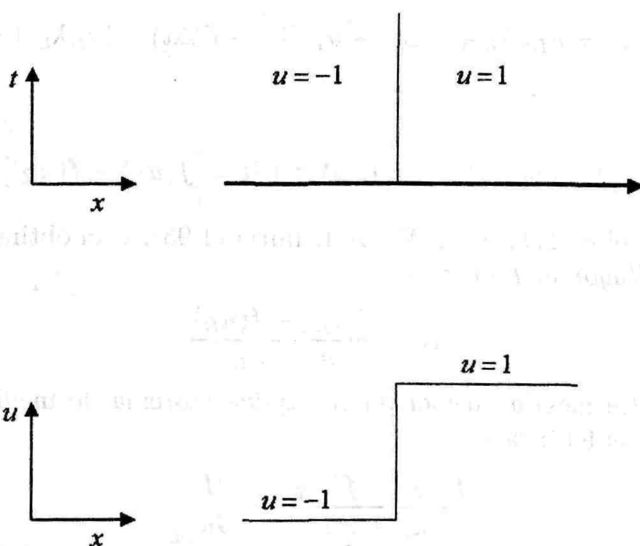


Fig. 1.5. Soluţia exactă a ecuaţiei Burgers corespunzătoare undei de şoc staţionare.

b) Soluţia corespunzătoare evantaiului de expansiune schiţată în fig. 1.6, în care undele de expansiune pleacă din punctul $(x = 0,\ t = 0)$.

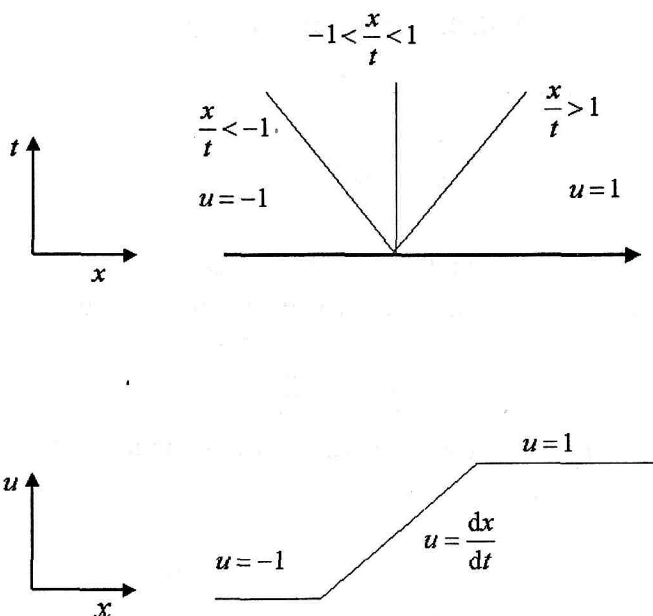


Fig. 1.6. Soluţia exactă a ecuaţiei Burgers corespunzătoare evantaiului de expansiune.

1.6.3. Condiţia de entropie

Deoarece soluţia slabă nu este unică, apare problema *eliminării soluţiilor care nu prezintă semnificaţie fizică*. Vom considera că *soluţia slabă care se manifestă în realitate reprezintă o limită a soluţiei cazului vâscos, pentru situaţia în care vâscozitatea tinde către zero* (Colella şi Puckett, [68]).

Astfel, fie u^e soluţia ecuaţiei de conservare mai generale:

$$\frac{\partial u^e}{\partial t} + \frac{\partial f(u^e)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2}, \tag{1.104}$$

unde ε reprezintă „*coeficientul de vâscozitate*". Vom spune că soluţia slabă corectă a ecuaţiei (1.79) este soluţia care satisface condiţia:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^e = u. \tag{1.105}$$

Soluţia care satisface şi ecuaţia (1.104) corespunde *unei probleme bine puse, în sensul că soluţia există, este unică şi depinde în mod continuu de condiţia iniţială* (Hadamard, [122], [106]).

De asemenea, vom remarca faptul că, *din punct de vedere fizic, soluţia slabă corectă este cea care asigură satisfacerea principiului al doilea al Termodinamicii, pentru că este singura soluţie care asigură creşterea entropiei la traversarea undei de şoc*. Vom numi această restricţie *condiţia de entropie*.

Pentru cazul ecuaţiei neliniare (1.79) şi a funcţiei flux convexe, (relaţia (1.83)), condiţia de entropie este satisfăcută dacă:

$$a(u_L) > C > a(u_R), \tag{1.106}$$

care, în cazul ecuaţiei Burgers (1.99), se scrie:

$$u_L = -1 > C > u_R = 1, \tag{1.107}$$

ceea ce arată că doar soluţia corespunzătoare undei de şoc staţionare, $C = 0$, (1.103) are semnificaţie fizică. Din punct de vedere geometric se pune astfel în evidenţă, (fig. 1.4), că informaţia se propagă doar în viitor (timpi ulteriori momentului iniţial).

1.6.4. Ecuaţia Burgers

Să considerăm ecuaţia Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, \tag{1.108}$$

având condiţia iniţială:

$$t = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{1.109}$$

Această ecuaţie prezintă un interes deosebit în aplicaţiile de dinamica fluidelor, pentru că neliniaritatea fluxului,

$$f(u) = \frac{u^2}{2}, \tag{1.110}$$

este reprezentativă pentru termenii de convecţie din ecuaţiile de mişcare.

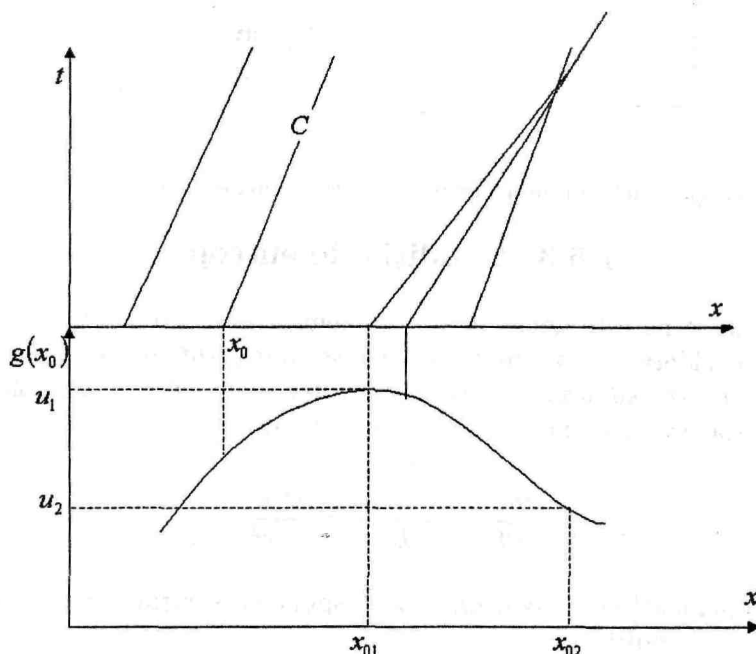


Fig. 1.7. Caracteristicile ecuaţiei Burgers.

Forma cvasiliniară a ecuaţiei (1.108) este:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.111}$$

iar viteza de transport locală este $a = u$. Caracteristicile ecuaţiei sunt definite de (1.86):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \tag{1.112}$$

iar în lungul acestora ecuaţia (1.111) ia forma (1.85):

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.113}$$

Caracteristicile determinate de ecuaţia (1.112) sunt curbe, definite parametric în funcţie de poziţia iniţială x_0:

$$x = x_0 + u(x_0, 0)\, t, \tag{1.114}$$

iar soluţia (1.88) se va scrie:

$$u(x,t) = u(x_0,0) = u_0(x_0) = u_0(x - u_0(x_0)\, t). \tag{1.115}$$

Gradientul necunoscutei (1.91) este:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0'(x_0)}{1 + t u_0'(x_0)}, \tag{1.116}$$

iar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u_0(x_0)\frac{\partial u}{\partial x} = -u_0(x_0)\frac{u_0'(x_0)}{1 + t u_0'(x_0)}. \tag{1.117}$$

Caracteristicile au panta proporţională cu $\frac{1}{u(x_0)}$ în hiperspaţiul (x, t). Dacă $u_0'(x_0) > 0$, caz tipic pentru un evantai de expansiune, caracteristicile nu se vor intersecta. În schimb, dacă $u_0'(x_0) < 0$, caracteristicile se vor intersecta (fig. 1.7).

Să considerăm două puncte x_{01} şi x_{02} de pe zona în care $u_0'(x_0) < 0$. Deoarece punctul A (fig. 1.8) se propagă cu o viteză, u_A, mai mare decât viteza punctului B, u_B, în mod progresiv, punctul A se va suprapune peste punctul B. În consecinţă poate rezulta un profil multiform, după cum este schiţat în fig. 1.8, la momentul de timp $t = t_2$. *Această soluţie nu are semnificaţie fizică, deoarece funcţia u nu poate avea două valori în acelaşi punct din spaţiu şi la acelaşi moment de timp.* Prin urmare,

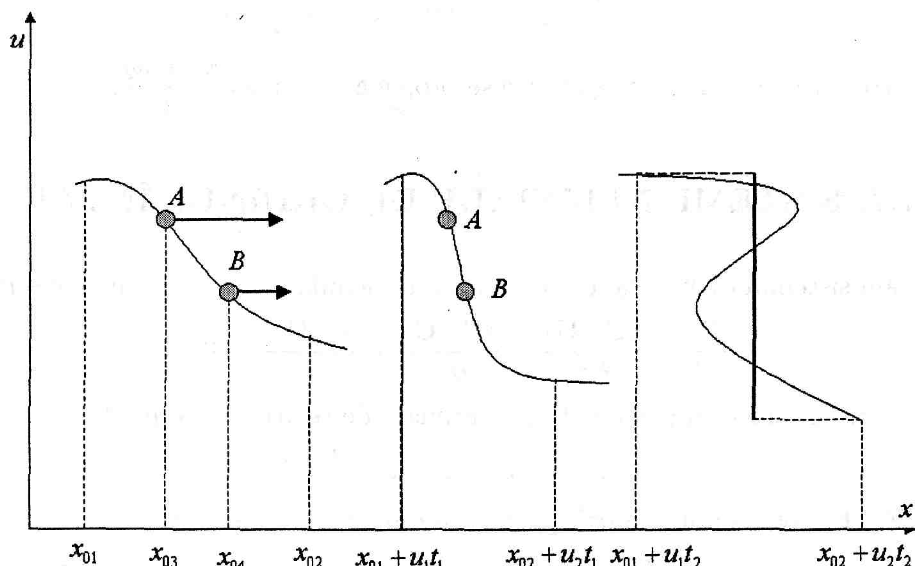


Fig. 1.8. Evoluţia în timp a soluţiei şi formarea undelor de şoc.

o condiţie iniţială care conţine o zonă cu pantă negativă va conduce la apariţia unei discontinuităţi de tip undă de şoc. Unda de şoc se va produce la o valoare critică a timpului, t_c, determinată din relaţiile (1.92) sau (1.117), din condiţia de anulare a numitorului, ceea ce corespunde apariţiei unui punct singular pentru derivata $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$t_c = -\frac{1}{\max\left[u_0'(x_0)\right]}. \tag{1.118}$$

Unda de şoc se va deplasa cu viteza C, iar relaţiile de salt Hugoniot-Rankine (1.96) vor fi:

$$\left[\frac{u^2}{2}\right] - C[u] = 0, \tag{1.119}$$

unde am notat cu $[a]$ saltul mărimii a la traversarea undei de şoc. Din (1.119) obţinem viteza undei:

$$C = \frac{u_1 + u_2}{2}, \tag{1.120}$$

în care u_1 este viteza din amontele undei, iar u_2 viteza din avalul acesteia. Apariţia şi propagarea discontinuităţii este legată de condiţia iniţială.

În secţiunea 1.6.2 s-a analizat cazul condiţiei iniţiale discontinue. Să considerăm acum situaţia condiţiei iniţiale liniare, când funcţia $u_0(x)$, definită de relaţia (1.100), este:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & \text{pentru} \quad x < 0, \\ u_1\left(1 - \dfrac{x}{L}\right) + u_2\dfrac{x}{L}, & \text{pentru} \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_2, & \text{pentru} \quad x > L. \end{cases} \tag{1.121}$$

Unda de şoc se va forma la o valoare a timpului, $t = t_c$, dată de relaţia (1.118):

$$t_c = \frac{L}{u_1 - u_2}, \tag{1.122}$$

şi va fi poziţionată la $x_c = t_c u_1 = L + t_c u_2$.

În consecinţă, soluţia problemei Burgers, pentru $t > t_c$, va fi:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & \text{pentru} \quad x < \dfrac{u_1 + u_2}{2}t, \\ u_2, & \text{pentru} \quad x > \dfrac{u_1 + u_2}{2}t, \end{cases} \tag{1.123}$$

care poate fi interpretată ca o undă de şoc care se propagă cu viteza $\dfrac{u_1 + u_2}{2}$.

1.7. SISTEME NELINIARE DE ORDINUL ÎNTÂI

Să considerăm sistemul diferenţial de ordinul întâi, neliniar, scris în formă conservativă:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z(\mathbf{U})}{\partial z} = 0, \tag{1.124}$$

unde vectorul funcţie necunoscută este dat în continuare de relaţiile (1.55):

$$\mathbf{U} = \left[\ u_1 \ \ \ldots \ \ u_m \ \right]^T, \tag{1.125}$$

iar vectorii $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$ reprezintă *fluxurile pe cele trei direcţii carteziene*:

$$\mathbf{F}_x = \left[\ F_{x1} \ \ \ldots \ \ F_{xm} \ \right]^T, \quad \mathbf{F}_y = \left[\ F_{y1} \ \ \ldots \ \ F_{ym} \ \right]^T, \quad \mathbf{F}_z = \left[\ F_{z1} \ \ \ldots \ \ F_{zm} \ \right]^T. \tag{1.126}$$

Sistemul (1.124) poate fi scris în forma compactă:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{F} = 0, \tag{1.127}$$

unde am introdus vectorul flux $\boldsymbol{F}$ definit de:

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{F}_x \boldsymbol{i} + \mathbf{F}_y \boldsymbol{j} + \mathbf{F}_z \boldsymbol{k}. \tag{1.128}$$

Pentru analiza tipului sistemului se va *liniariza local* sistemul (1.124), introducând matricele iacobiene:

$$\mathbf{A}_x = \frac{\partial F_x}{\partial U}, \quad A_{x_{ij}} = \frac{\partial F_{xi}}{\partial u_j}, \tag{1.129}$$

$$\mathbf{A}_y = \frac{\partial F_y}{\partial U}, \quad A_{y_{ij}} = \frac{\partial F_{yi}}{\partial u_j}, \tag{1.130}$$

$$\mathbf{A}_z = \frac{\partial F_z}{\partial U}, \quad A_{z_{ij}} = \frac{\partial F_{zi}}{\partial u_j}, \tag{1.131}$$

iar *forma cvasiliniară* a sistemului (1.124) va fi asemănătoare cu forma (1.54):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = 0. \tag{1.132}$$

Deosebirea faţă de cazul liniar constă în aceea că matricele $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{A}_z$, de dimensiune $(m \times m)$, nu mai sunt constante; acestea depind de vectorul necunoscută $\mathbf{U}$, dar nu depind de derivatele acestuia.

În mod similar cazului liniar, vom putea rescrie sistemul (1.132) în forma compactă:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left[\boldsymbol{A}\left(\mathbf{U}\right)\nabla\right]\mathbf{U} = 0, \tag{1.133}$$

unde am introdus matricea iacobiană vector $\boldsymbol{A}$ definită de:

$$\boldsymbol{A}\left(\mathbf{U}\right) = \mathbf{A}_x\left(\mathbf{U}\right)\boldsymbol{i} + \mathbf{A}_y\left(\mathbf{U}\right)\boldsymbol{j} + \mathbf{A}_z\left(\mathbf{U}\right)\boldsymbol{k}. \tag{1.134}$$

Cea mai eficientă metodă de analiză a proprietăţilor sistemelor neliniare are la bază *conceptul de propagare a undelor neliniare.* În cazul general, reprezentarea propagării undelor neliniare are la bază noţiunea de *front de undă.*

Frontul de undă reprezintă suprafaţa care separă, la un moment dat de timp, punctele din spaţiu influenţate de perturbaţie de punctele care încă nu au fost atinse de perturbaţie. Reprezentarea generală a unei unde este dată de relaţia:

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x,y,z,t)}, \tag{1.135}$$

unde suprafaţa $S(x,y,z,t) = \text{const.}$ reprezintă *frontul de undă* (numit şi *faza undei*), iar $\hat{\mathbf{U}}$ reprezintă *amplitudinea complexă a undei.*

Considerând soluţia sistemului (1.132) de forma undei (1.135), se obţine sistemul liniar:

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\boldsymbol{A}\nabla\right)S\right]\hat{\mathbf{U}} = 0, \tag{1.136}$$

sau, dacă vom nota cu:

$$\boldsymbol{d} = \nabla S, \qquad n_t = \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{1.137}$$

componentele normalei la frontul de undă, numite şi *normale caracteristice,* în hiperspaţiul (x,y,z,t), rezultă:

$$\left[n_t\mathbf{I} + \boldsymbol{A}\left(\mathbf{U}\right)\boldsymbol{d}\right]\hat{\mathbf{U}} = 0. \tag{1.138}$$

Sistemul liniar omogen astfel obţinut are soluţie diferită de soluţia banală dacă:

$$\det\left[\boldsymbol{A}\left(\mathbf{U}\right)\boldsymbol{d} + n_t\mathbf{I}\right] = 0, \tag{1.139}$$

relaţie care se numeşte *ecuaţia caracteristică* a sistemului de ecuaţii diferenţiale. Evident, ecuaţia caracteristică este o ecuaţie algebrică de ordinul m, având ca necunoscute componentele normalei la frontul de undă $(\boldsymbol{d}, n_t)$, şi poate avea cel mult m rădăcini reale.

Sistemul diferenţial (1.124) este de *tip hiperbolic* dacă toate cele m normale caracteristice sunt reale, iar soluţiile sistemului (1.138) corespunzătoare acestor normale sunt liniar independente. Dacă toate normalele caracteristice sunt reale, dar soluţiile sistemului omogen al amplitudinilor complexe (1.138) nu sunt liniar independente, atunci sistemul cu derivate parţiale este *parabolic.* Dacă toate cele m normale caracteristice sunt complex conjugate, atunci sistemul este *eliptic.* În sfârşit, dacă, pentru ecuaţia caracteristică, un număr de normale sunt reale dar există şi rădăcini complex conjugate, sistemul va fi *hibrid.*

1.8. SISTEME HIPERBOLICE NELINIARE

La fel ca în cazul sistemelor liniare, clasificarea sistemelor neliniare se poate face funcţie de valorile şi vectorii proprii corespunzători matricei $\mathbf{K}$ (paragraful 1.5). Dacă valorile proprii ale matricei iacobiene $\mathbf{K}$ sunt reale, iar vectorii proprii corespunzători sunt liniar independenţi, sistemul este de tip hiperbolic şi admite o soluţie de tip undă. Este util deci, din punct de vedere practic, să considerăm

suprafaţa de undă $S(x, y, z, t)$ de forma:

$$S(x, y, z, t) = \boldsymbol{da} - \omega t, \tag{1.140}$$

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, t) = d_x\boldsymbol{i} + d_y\boldsymbol{j} + d_z\boldsymbol{k}, \tag{1.141}$$

unde $\boldsymbol{x}$ este vectorul de poziţie, $\boldsymbol{d}$ reprezintă vectorul *număr de undă,* iar $\omega(\boldsymbol{x}, t)$ reprezintă pulsaţia undei.

1.8.1. Unde liniare

Dacă se face ipoteza că vectorul de undă $\boldsymbol{d}$ este constant, atunci reprezentarea (1.140) corespunde unei *unde plane liniare.* În acest mod, unda neliniară (1.135) ia forma (1.59):

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{da} - \omega t)}. \tag{1.142}$$

Particularizând relaţia (1.136) pentru această situaţie, se obţine sistemul algebric omogen:

$$\left[-\omega \mathbf{I} + \boldsymbol{dA}(\mathbf{U})\right] \hat{\mathbf{U}} = 0. \tag{1.143}$$

Notând:

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}) = \boldsymbol{dA}, \quad \lambda = \omega, \tag{1.144}$$

se obţine ecuaţia de valori şi vectori proprii:

$$\mathbf{K}(\mathbf{U})\hat{\mathbf{U}} = \lambda \hat{\mathbf{U}}, \tag{1.145}$$

din care se vor determina proprietăţile undelor plane elementare de forma (1.142).

1.8.2. Unde neliniare

În cazul general al *undei neliniare,* când $\boldsymbol{d}{=}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, t)$, cele m valori proprii ale matricei iacobiene $\mathbf{K}$ definesc, pentru pulsaţiile undei, m relaţii de forma:

$$\omega^{(k)} = \lambda^{(k)}\left(\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, t)\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.146}$$

care poartă numele de *relaţii de dispersie*. Derivatele pulsaţiei ω în raport cu componentele vectorului de undă $\boldsymbol{d}$ definesc *viteza de grup a undei* $\boldsymbol{v}^{(G)}$:

$$\boldsymbol{v}^{(G)} = \frac{\partial \omega}{\partial d_x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \omega}{\partial d_y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \omega}{\partial d_z}\boldsymbol{k}. \tag{1.147}$$

Viteza de grup are o semnificaţie fizică bine definită, ea reprezentând viteza cu care se propagă *energia undei.*

În acest caz, pentru unda neliniară (1.142), avem (Hirsch, [139]):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathrm{i}\left(-\omega - t\frac{\partial \omega}{\partial t} + \boldsymbol{x}\frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial t}\right)\hat{\mathbf{U}} = \mathrm{i}\left\{-\omega + \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial t}\left[-t\vec{v}^{(G)} + \boldsymbol{x}\right]\right\}\hat{\mathbf{U}}, \tag{1.148}$$

$$\nabla \mathbf{U} = \mathrm{i}\left(-t\nabla\omega + \boldsymbol{d}\nabla\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\nabla\boldsymbol{d}\right)\hat{\mathbf{U}} = \mathrm{i}\left\{\boldsymbol{d}\nabla\vec{x} + \nabla\boldsymbol{d}\left[-t\vec{v}^{(G)} + \boldsymbol{x}\right]\right\}\hat{\mathbf{U}}. \tag{1.149}$$

Termenul din paranteza dreaptă din relaţiile de mai sus se anulează în două situaţii:

a) în cazul undelor plane liniare analizat anterior ($\boldsymbol{d}=$ const.);

b) dacă:

$$\boldsymbol{v}^{(G)} = \frac{\boldsymbol{x}}{t}, \tag{1.150}$$

ceea ce corespunde unui *sistem de referinţă care se deplasează cu viteza de grup* $\boldsymbol{v}^{(G)}$.

Se pune astfel în evidenţă că, pentru cazul undei neliniare, soluţia sistemului nu are *o scară de lungimi distinctă,* fiind funcţie doar de variabila $\dfrac{\boldsymbol{x}}{t}$. Din punct de vedere fizic această situaţie corespunde unei unde simple produsă la interfaţa a două stări constante ale fluidului (unda de şoc sau unda de rarefiere).

1.8.3. Sistemul caracteristic. Variabile Riemann

Pentru *sistemele hiperbolice*, deoarece toate valorile proprii sunt reale iar vectorii proprii sunt liniar independenţi, matricea iacobiană **K** poate fi diagonalizată:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}, \tag{1.151}$$

unde **R** este matricea vectorilor proprii, iar **Λ** este matricea diagonală a valorilor proprii (1.71). Dacă vom înmulţi la stânga sistemul diferenţial (1.133) cu $\mathbf{R}^{-1}$, se va obţine sistemul:

$$\mathbf{R}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left[\left(\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{R}\right)\mathbf{R}^{-1}\nabla\right]\mathbf{U} = 0. \tag{1.152}$$

Deosebirea esenţială faţă de sistemele liniare este aceea că matricea vectorilor proprii **R** *şi, respectiv, inversa acesteia* $\mathbf{R}^{-1}$, *nu mai sunt matrice constante şi deci nu mai pot fi introduse sub operatorii de derivare.* În schimb, putem defini, în continuare, variabilele caracteristice **W** prin relaţiile diferenţiale:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{R}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \quad \nabla\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}\nabla\mathbf{U}. \tag{1.153}$$

Dacă vom nota cu simbolul ∂ o derivată parţială oarecare (în raport cu timpul t sau cu variabilele spaţiale x, y, z), atunci relaţiile (1.153) se pot scrie formal astfel:

$$\partial\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}\partial\mathbf{U}, \tag{1.154}$$

sau:

$$\partial\mathbf{U} = \mathbf{R}\partial\mathbf{W}. \tag{1.155}$$

Se pune astfel în evidenţă faptul că unda asociată variaţiilor stărilor ∂U poate fi reprezentată de o superpoziţie a undelor simple asociate vectorilor proprii **R**, amplitudinile acestora fiind egale cu variaţiile variabilelor caracteristice $\partial\mathbf{W}$.

Deşi variabilele caracteristice nu pot fi explicit determinate, definiţia (1.154) poate fi acceptată întotdeauna, ceea ce permite scrierea sistemului diferenţial (1.152), pentru valorile caracteristice, sub forma:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \left(\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{R}\right)\nabla\mathbf{W} = 0. \tag{1.156}$$

Aceste ecuaţii poartă numele de *relaţii de compatibilitate sau sistem caracteristic* şi reprezintă proiecţia sistemului (1.133) pe suprafeţele caracteristice definite de ecuaţiile (1.140).

În cazul sistemelor hiperbolice, cei m vectori proprii ai matricei iacobiene **K** formează un sistem de vectori liniari independenţi, deci poţi fi consideraţi ca o bază în spaţiul cu dimensiunea m a necunoscutei **U**. În consecinţă, vom putea admite o descompunere a necunoscutei în această bază:

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(\boldsymbol{x}, t)\mathbf{r}^{(k)}(\boldsymbol{x}, t), \tag{1.157}$$

care poate fi rescrisă matriceal sub forma:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\alpha, \tag{1.158}$$

în care:

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1(\boldsymbol{x}, t) & \cdots & \alpha_m(\boldsymbol{x}, t) \end{bmatrix}^T. \tag{1.159}$$

Înmulţind la stânga egalităţii (1.158) cu $\mathbf{R}^{-1}$ rezultă:

$$= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}. \tag{1.160}$$

Din punct de vedere fizic, vectorii proprii pot fi interpretaţi ca *unde elementare,* numite şi *unde simple.* Aşadar, se poate *reconstrui* soluţia sistemului de ecuaţii folosind *descompunerea în unde simple,* de mai sus. În acest mod rămân ca necunoscute doar amplitudinile α_k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Deşi structura sistemului diferenţial (1.156) precum şi descompunerea (1.157) sunt asemănătoare cazului liniar, există totuşi diferenţe fundamentale între cele două situaţii. Dacă în cazul liniar vectorii proprii $\mathbf{r}^{(k)}$ sunt constanţi, în cazul neliniar aceştia depind de vectorul conservativ **U**, ceea ce face ca

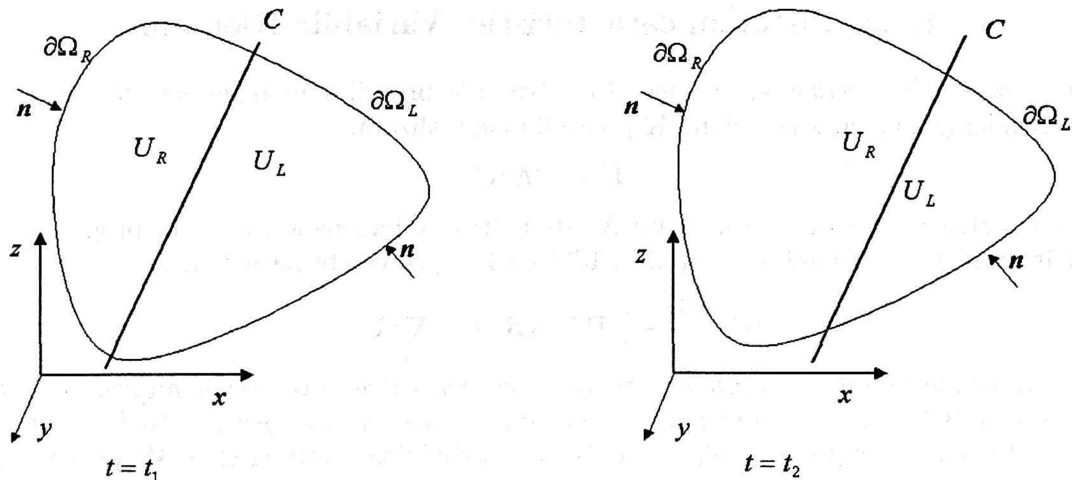


Fig. 1.9. Propagarea unei discontinuităţi în timp şi spaţiu, cu viteza constantă C .

amplitudinile α_k să nu mai fie reprezentate de variabilele caracteristice. Pentru a pune în evidenţă acest aspect, să introducem soluţia (1.157) în sistemul diferenţial (1.133). Vom obţine:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}\mathrm{ff}) + \boldsymbol{A}\nabla\mathbf{R}\mathrm{ff} = 0, \tag{1.161}$$

sau încă:

$$\mathbf{R}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t}\alpha + \boldsymbol{A}\left[(\nabla\mathbf{R})\,\mathrm{ff} + \mathbf{R}\,(\nabla\oslash)\right] = 0. \tag{1.162}$$

Înmulţind la stânga egalităţii (1.162) cu $\mathbf{R}^{-1}$ şi rearanjând termenii, obţinem:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{R}\nabla\oslash + \mathbf{R}^{-1}\left[\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\nabla\mathbf{R}\right]\rangle = 0. \tag{1.163}$$

Termenul din paranteză este dificil de evaluat deoarece conţine derivatele vectorilor proprii $\mathbf{r}^{(k)}$ în raport cu componentele vectorului $\mathbf{U}$:

$$\frac{\partial\mathbf{r}^{(k)}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{r}^{(k)}}{\partial\mathbf{U}}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}, \quad \nabla\mathbf{r}^{(k)} = \frac{\partial\mathbf{r}^{(k)}}{\partial\mathbf{U}}\nabla\mathbf{U}. \tag{1.164}$$

Sistemul diferenţial de definiţie a valorilor caracteristice, format din ecuaţiile (1.153), nu poate fi, în cazul general, integrat, deci nu putem să determinăm explicit valorile caracteristice $\mathbf{W}$. Există însă situaţii particulare când se poate obţine o schimbare neliniară de variabile care să permită determinarea variabilelor caracteristice. În această situaţie, variabilele caracteristice poartă numele de *variabile Riemann.* În cazul în care variabilele Riemann se conservă, acestea se mai numesc şi *invarianţi Riemann.*

1.8.4. Soluţie slabă. Condiţia de entropie

Prin definiţie, *soluţia slabă* a sistemului (1.124) este soluţia care satisface relaţia:

$$\int_\Omega \mathbf{U}(\boldsymbol{x},t_2)\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mathbf{U}(\boldsymbol{x},t_1)\mathrm{d}\Omega + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\delta\Omega_R}\boldsymbol{F}(\mathbf{U}_R)\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\delta\Omega_L}\boldsymbol{F}(\mathbf{U}_L)\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t, \tag{1.165}$$

unde Ω este domeniul de integrare, $\partial\Omega = \partial\Omega_R + \partial\Omega_L$ frontiera acestuia având normala $\boldsymbol{n}$ orientată către interior, iar $t_1 < t_2$ reprezintă timpul (fig. 1.9).

Ca şi în cazul ecuaţiilor scalare, pentru sistemele neliniare *este necesară o condiţie de entropie,* pentru a asigura unicitatea soluţiei slabe. Prin definiţie, soluţia admisibilă $\mathbf{U}$ a sistemului (1.124) este soluţia care reprezintă limita *soluţiei vâscoase* $\mathbf{U}^e$ *când vâscozitatea tinde la zero.*

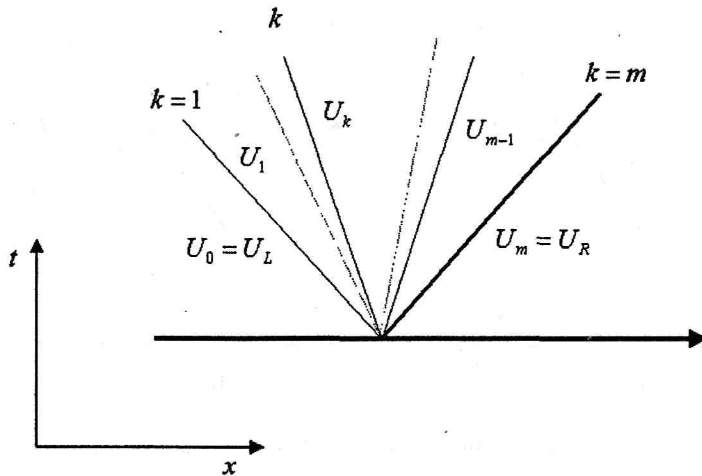


Fig. 1.10. Soluţia unui sistem hiperbolic ca o secvenţă de stări constante separate de discontinuităţi simple.

Soluţia vâscoasă $\mathbf{U}^e$ este aceea care satisface sistemul:

$$\frac{\partial \mathbf{U}^e}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{F}(\mathbf{U}^e) = \varepsilon \triangle \mathbf{U}^e, \tag{1.166}$$

unde ε este „coeficientul de vâscozitate". Condiţia de admisibilitate pentru soluţia $\mathbf{U}$ este deci (1.105):

$$\mathbf{U} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{U}^e. \tag{1.167}$$

Problema astfel formulată este *bine pusă*, în sensul că se asigură unicitatea soluţiei, care depinde în mod continuu de condiţiile iniţiale (Hadamard, [122], [106]).

1.8.5. Perturbaţii mici

Relaţiile (1.154), precum şi diferenţele dintre sistemul caracteristic (1.156) şi sistemul amplitudinilor (1.163), sugerează posibilitatea unei liniarizări locale. Aceasta este echivalentă cu admiterea ipotezei micilor perturbaţii sau cu perturbarea unei soluţii de bază, astfel încât perturbaţia să se propage în lungul unei caracteristici. În consecinţă, vom căuta soluţia slabă care satisface condiţiile asociate cu o singură perturbaţie, de tipul unei unde simple, care separă două stări constante (unde de şoc sau de rarefiere).

După cum s-a arătat, (1.150), o astfel de undă simplă nu are o scară de lungimi distinctă, iar soluţia este funcţie de variabila x/t. Soluţia problemei Riemann generale va fi obţinută prin asamblarea celor m unde elementare. O imagine grafică a acestui procedeu de construcţie a soluţiei problemei Riemann se poate urmări, pentru cazul unidimensional, în fig. 1.10.

Să considerăm două stări oarecare, $\mathbf{U}_k$ şi $\mathbf{U}_{k-1}$, separate prin unda simplă k. Dacă diferenţa:

$$\delta \mathbf{U}_k = \mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{k-1}, \tag{1.168}$$

este mică, atunci putem considera unda simplă k *cvasiliniară*, iar produsul $\alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$ poate fi interpretat ca fiind egal cu saltul $\delta \mathbf{U}_k$:

$$\delta \mathbf{U}_k = \text{ff}_k \mathbf{r}^{(k)}. \tag{1.169}$$

Putem concluziona că un salt elementar, $\delta \mathbf{U}_k$, se propagă ca o undă simplă, amplitudinea undei, $\ _k$, este egală cu mărimea saltului, iar direcţia de propagare este dată de vectorul propriu, $\mathbf{r}^{(k)}$. Comparând relaţia de mai sus cu definiţia (1.154) a variabilelor caracteristice, vom identifica $\alpha_k = \partial w_k$. Deci variaţia variabilei caracteristice are semnificaţia de amplitudine a undei simple, iar mărimea acesteia este egală cu saltul $\delta \mathbf{U}_k$. Viteza de propagare a undei simple este dată de valoarea proprie asociată vectorului propriu ce reprezintă unda simplă. Fie $\lambda_k(\mathbf{U})$ viteza de propagare a undei simple k.

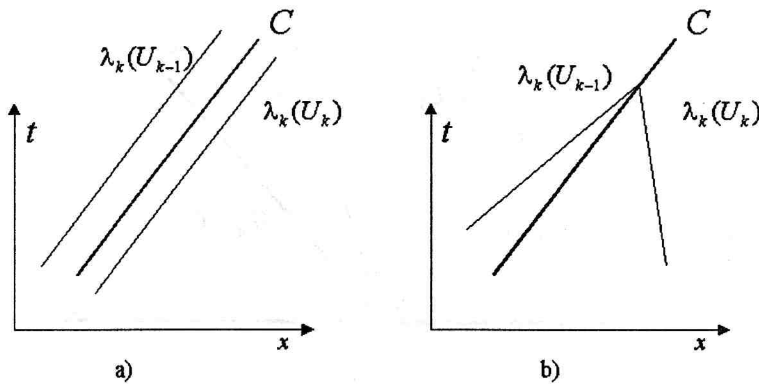


Fig. 1.11. Tipuri de unde neliniare; a) unde liniar degenerate; b) unde neliniare.

Considerând saltul $\delta \mathbf{U}_k$ (1.168) mic, putem dezvolta în serie Taylor $\lambda_k(\mathbf{U}_k)$:

$$\lambda_k(\mathbf{U}_k) = \lambda_k(\mathbf{U}_{k-1} + \delta U_k) = \lambda_k(\mathbf{U}_{k-1}) + \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{U}} \delta U_k + O\left(\delta \mathbf{U}_k^T \cdot \delta \mathbf{U}_k\right). \tag{1.170}$$

Deci, în primă aproximaţie, rezultă:

$$\lambda_k(\mathbf{U}_k) - \lambda_k(\mathbf{U}_{k-1}) \cong \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U}_k = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)} \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial \mathbf{U}}. \tag{1.171}$$

Vom distinge două situaţii (Colella şi Puckett, [68]):

a) Unde *liniar degenerate* dacă, pentru orice vector $\mathbf{U}$, avem relaţiile:

$$\mathbf{r}^{(k)} \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial \mathbf{U}} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.172}$$

La fel ca în cazul liniar, vectorii $\mathbf{r}^{(k)}$ şi $\frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial \mathbf{U}}$ sunt ortogonali, (fig. 1.11a)), iar viteza de propagare a undelor simple rămâne constantă;

b) Unde *neliniare* dacă, pentru orice vector $\mathbf{U}$, există relaţiile:

$$\mathbf{r}^{(k)} \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial \mathbf{U}} \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.173}$$

deci direcţiile $\mathbf{r}^{(k)}$ şi $\frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial \mathbf{U}}$ nu sunt niciodată perpendiculare (fig. 1.11b)), iar la traversarea discontinuităţii k viteza λ_k se modifică.

Undele liniar degenerate satisfac întotdeauna condiţia de entropie, pe când pentru cele neliniare trebuie impusă restricţia:

$$\lambda_k(\mathbf{U}_{k-1}) > C > \lambda_k(\mathbf{U}_k). \tag{1.174}$$

Se asigură astfel *convergenţa* caracteristicilor într-o undă de şoc, pentru a evita situaţia în care caracteristicile diverg, caz corespunzător undelor de şoc de expansiune.

1.9. ECUAŢII LINIARE DE ORDINUL AL DOILEA

Cunoscând că o ecuaţie diferenţială de ordinul n este echivalentă cu un sistem diferenţial de n ecuaţii de ordinul întâi, analiza tipului şi a proprietăţilor unei ecuaţii sau sistem de ordin superior se poate face prin aceleaşi metode prezentate în secţiunea 1.3.1 şi paragraful 1.6. Vom exemplifica, mai jos, pentru ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de *ordinul doi cvasiliniară* în două dimensiuni:

$$a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + d\frac{\partial \varphi}{\partial x} + e\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f\varphi = g. \tag{1.175}$$

Funcţiile a, b, c, d, e, f, g pot depinde, în general, de x, y, $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, şi φ. *Dacă aceste funcţii nu depind decât de variabilele independente x, y (sau sunt constante), ecuaţia este liniară.* În caz contrar, ecuaţia este *neliniară* (Şabac, [258]).

Tipul unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi este determinat de termenii ce conţin derivatele de ordin doi, deci este suficient să analizăm *partea omogenă*:

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{1.176}$$

Ecuaţia de ordinul doi (1.176) poate fi transformată într-un sistem diferenţial de ordinul întâi (Anderson şi col., [7]). Într-adevăr, dacă vom nota:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{1.177}$$

atunci, evident, rezultă:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.178}$$

iar sistemul de ordinul întâi, având ca necunoscute funcţiile u şi v se poate scrie:

$$\begin{gathered}a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.\end{gathered} \tag{1.179}$$

Vom observa că *sistemul de ordinul întâi, asociat ecuaţiei de ordinul doi nu este unic,* existând, teoretic, o infinitate de variante, funcţie de reprezentarea termenului ce conţine derivata mixtă $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$.

Sistemul (1.179) poate fi scris în forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}+\begin{bmatrix} b & c\\ 1 & 0\end{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}=0,\quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix} u\\ v\end{bmatrix}. \tag{1.180}$$

Luând soluţia de forma:

$$\mathbf{U}=\hat{\mathbf{U}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(d_x x+d_y y)}, \tag{1.181}$$

(secţiunea 1.3.1 şi paragraful 1.6), se obţine ecuaţia caracteristică:

$$\det\left(d_x\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+d_y\begin{bmatrix} b & c\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=0, \tag{1.182}$$

sau, dezvoltând determinantul:

$$a\left(\frac{d_x}{d_y}\right)^2+b\left(\frac{d_x}{d_y}\right)+c=0, \tag{1.183}$$

ecuaţie care are rădăcinile:

$$\left(\frac{d_x}{d_y}\right)_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{1.184}$$

În funcţie de discriminantul:

$$\Delta=b^2-4ac, \tag{1.185}$$

vom distinge următoarele cazuri: a) eliptic, dacă $\Delta<0$, b) parabolic, dacă $\Delta=0$, c) hiperbolic, dacă $\Delta>0$.

În cazul ecuaţiilor diferenţiale multidimensionale, extinderea metodei prezentată mai sus (transformarea ecuaţiei în sistem de ordinul întâi), nu ridică nici o dificultate.

1.9.1. Forma canonică

Prin formă canonică a unei ecuaţii cu derivate parţiale se înţelege forma în care coeficientul derivatei mixte este nul (Şabac, [258]). Obţinerea formei canonice se poate face printr-o transformare de coordonate convenabil aleasă, funcţie de tipul hiperbolic, parabolic sau eliptic al acesteia.

Să considerăm o transformare geometrică de la sistemul de coordonate (x, y), la referenţialul (ξ, η) dată de relaţii de forma (Anderson şi col., [7]):

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \tag{1.186}$$

Prin definiţie, *matricea iacobiană a transformării*, $\mathbf{J}$, este:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix}, \tag{1.187}$$

unde am notat:

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}. \tag{1.188}$$

Transformarea este nesingulară dacă determinantul $\det(\mathbf{J})$ este nenul:

$$\det(\mathbf{J}) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0. \tag{1.189}$$

Vom rescrie ecuaţia diferenţială (1.175) în noul sistem de referinţă (ξ, η). Avem succesiv:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi_x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\xi_x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\eta_x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\xi_x\eta_x + \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi_{xx} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_{xx} \text{ etc..} \tag{1.190}$$

Introducând (1.190) în ecuaţia (1.175) şi grupând termenii, obţinem o ecuaţie de forma:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta) = 0, \tag{1.191}$$

în care:

$$A = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \quad B = 2a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + 2c\xi_y\eta_y, \quad C = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \tag{1.192}$$

Este uşor de verificat că discriminantul ecuaţiei (1.191) este:

$$\Delta = B^2 - 4AC = \left(b^2 - 4ac\right)\det(\mathbf{J}), \tag{1.193}$$

ceea ce pune în evidenţă *prezervarea tipului ecuaţiei diferenţiale la aplicarea unei transformări geometrice nesingulare.*

Să considerăm cazul ecuaţiei cu coeficienţi constanţi şi să notăm cu $\lambda_{1,2}$ cele două rădăcini ale ecuaţiei caracteristice (1.183). Vom prezenta modalitatea de obţinere a formei canonice, precum şi o serie de proprietăţi matematice şi fizice pentru cele trei tipuri de ecuaţii: hiperbolic, parabolic şi eliptic.

1.9.2. Ecuaţii hiperbolice

În acest caz, rădăcinile $\lambda_{1,2}$ (1.183) sunt reale şi distincte. Construim transformarea geometrică:

$$y + \lambda_1 x = \xi + \eta, \quad y + \lambda_2 x = \xi - \eta, \tag{1.194}$$

sau, explicit:

$$\xi = y + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)x, \quad \eta = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)x. \tag{1.195}$$

Metricele transformării vor fi:

$$\xi_x = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{b}{2a}, \quad \xi_y = 1, \quad \eta_x = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\Delta}{2a}, \quad \eta_y = 0. \tag{1.196}$$

Se poate verifica imediat că, înlocuind în (1.192), obţinem:

$$A = -\frac{\Delta^2}{4a}, \quad B = 0, \quad C = \frac{\Delta^2}{4a}, \tag{1.197}$$

iar ecuaţia (1.191) devine:

$$-\frac{\Delta^2}{4a}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\Delta^2}{4a}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta) = 0. \tag{1.198}$$

Înmulţind cu $\left(-\frac{4a}{\Delta^2}\right)$, se obţine *forma canonică a ecuaţiei de tip hiperbolic:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + G(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta) = 0, \tag{1.199}$$

unde:

$$G(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta) = \left(-\frac{4a}{\Delta^2}\right) F(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta). \tag{1.200}$$

Pentru ecuaţiile hiperbolice se poate construi o transformare geometrică de tipul (1.186) astfel încât, în coordonatele (ξ, η), ecuaţia să devină:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = G(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta). \tag{1.201}$$

Ecuaţia (1.201) poartă numele de *formă caracteristică* a ecuaţiei diferenţiale hiperbolice. Pentru a obţine forma caracteristică vom construi transformarea geometrică astfel încât coeficienţii A, şi C, (1.192), să se anuleze:

$$A = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0, \quad C = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0. \tag{1.202}$$

Din (1.202), obţinem ecuaţia:

$$a\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + b\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + c = 0, \tag{1.203}$$

În lungul suprafeţelor $\xi(x, y) =$ const., vom avea:

$$\mathrm{d}\xi = \xi_x \mathrm{d}x + \xi_y \mathrm{d}y = 0, \tag{1.204}$$

sau:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}. \tag{1.205}$$

Înlocuind în (1.203), obţinem:

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - b\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + c = 0. \tag{1.206}$$

Cele două rădăcini reale ale ecuaţiei de mai sus sunt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \lambda_{1,2}. \tag{1.207}$$

Curbele definite de ecuaţiile diferenţiale (1.207) se numesc *caracteristici.* Aceste ecuaţii se pot integra şi obţinem:

$$C^+ : y - \lambda_1 x = \text{const.}, \quad C^- : y - \lambda_2 x = \text{const.}. \tag{1.208}$$

Prin fiecare punct din spaţiul (x, y) trec două caracteristici (fig. 1.12). În cazul în care coeficienţii a, b, c nu mai sunt constanţi, ecuaţiile (1.207) pot fi integrate, fie exact, fie numeric, admiţând valori constante pentru aceştia într-o vecinătate a unui punct din domeniu, iar *caracteristicile nu vor mai fi nişte drepte.* Domeniul cuprins între caracteristici pentru $y < y_p$ se numeşte *domeniul de dependenţă* al punctului P, iar domeniul corespunzător valorilor $y > y_p$, *domeniul de influenţă al punctului P.* Soluţia în P se va dezvolta funcţie de informaţia din domeniul său de dependenţă, iar la rândul său punctul

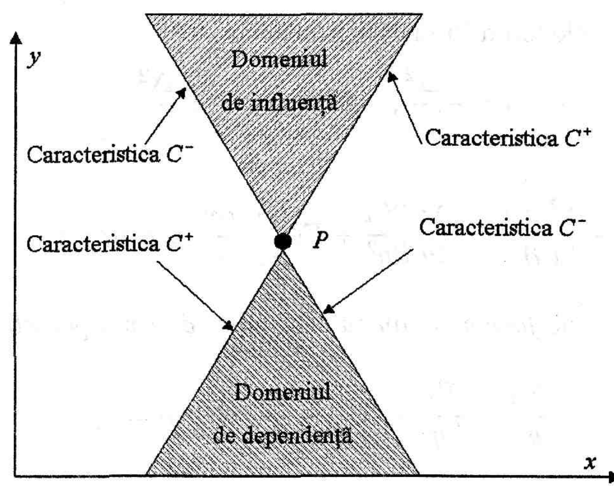


Fig. 1.12. Domeniul de dependență şi domeniul de influență pentru ecuații hiperbolice.

P va determina dezvoltarea soluţiei doar în punctele din domeniul său de influenţă. O proprietate foarte importantă a ecuaţiilor hiperbolice este *limitarea spaţio-temporală a domeniilor de dependenţă şi, respectiv, de influenţă.*

Construind transformarea geometrică de forma:

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x, \tag{1.209}$$

ale cărei metrice sunt:

$$\xi_x = -\lambda_1, \quad \xi_y = 1, \quad \eta_x = -\lambda_2, \quad \eta_y = 1, \tag{1.210}$$

se obţine, din (1.192):

$$A = 0, \quad B = -\frac{b^2}{2a}, \quad C = 0. \tag{1.211}$$

Deci forma (1.191) devine identică cu forma canonică (1.201):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{2a}{b^2}F(\frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}, u, \xi, \eta). \tag{1.212}$$

Exemplu. Să considerăm ecuaţia undelor (1.10):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.213}$$

Vom aplica rezultatele anterioare, făcând $a = 1$, $c = -\alpha^2$, $b = F = 0$. Deoarece discriminantul (1.185) este pozitiv, $(\Delta = b^2 - 4ac = 4\alpha^2)$, ecuaţia este de *tip hiperbolic.* Caracteristicile ecuaţiei sunt definite de (1.207), $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{1,2} = \pm\alpha$. Integrând aceste ecuaţii, obţinem curbele caracteristice (1.208):

$$C^+ : x + \alpha t = \text{const.}, \quad C^- : x - \alpha t = \text{const.}. \tag{1.214}$$

Făcând transformarea geometrică (1.209):

$$\xi = x + \alpha t, \quad \eta = x - \alpha t, \tag{1.215}$$

obţinem forma caracteristică (1.212):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0. \tag{1.216}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este cunoscută sub numele de *soluţia D'Alembert:*

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{1.217}$$

unde f_1 şi f_2 sunt două funcţii arbitrare de clasă C^2. Revenind la variabilele (t, x), obţinem:

$$u(t, x) = f_1(x + \alpha t) + f_2(x - \alpha t). \tag{1.218}$$

Determinarea completă a soluţiei presupune determinarea funcţiilor f_1 şi f_2. Aceasta este posibil doar dacă specificăm *condiţiile iniţiale* ale problemei. În primul rând, apare evident că, pentru a avea *soluţie unică*, sunt necesare *două condiţii iniţiale* de forma:

$$t = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v_0(x). \tag{1.219}$$

Într-adevăr, din (1.218) şi (1.219) obţinem sistemul:

$$f_1(x) + f_2(x) = u_0(x), \quad f_1'(x) - f_2'(x) = \frac{1}{\alpha} v_0(x). \tag{1.220}$$

Rezolvând sistemul de mai sus obţinem:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x) + \frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x} v_0(x')\mathrm{d}x'\right], \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x) - \frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x} v_0(x')\mathrm{d}x'\right], \tag{1.221}$$

unde x_0 este un punct arbitrar fixat. Înlocuind în (1.218) , obţinem soluţia ecuaţiei hiperbolice (1.213) cu condiţiile iniţiale (1.219):

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+\alpha t) + u_0(x-\alpha t)\right] + \frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} v_0(x')\mathrm{d}x'. \tag{1.222}$$

Constatăm că *soluţia depinde în mod continuu de condiţiile iniţiale ale problemei.* Termenul din paranteza dreaptă din relaţia de mai sus reprezintă *informaţia care se propagă în lungul* celor două caracteristici care trec prin punctul $P(x,t)$, iar ultimul termen, *informaţia conţinută în domeniul dintre caracteristici.* Urmărind fig. 1.12, putem interpreta, în hiperspaţiul $(x, t = y)$, *domeniul cuprins între caracteristici pentru* $t < t_P$, *ca domeniul de dependenţă al punctului* P, iar *domeniul dintre caracteristici pentru* $t > t_P$, *ca domeniu de influenţă al punctului* P. Într-adevăr, o perturbaţie oarecare va influenţa soluţia în punctul P, doar dacă aceasta apare într-un punct din domeniul de dependenţă. Invers, o perturbaţie apărută în P va afecta doar punctele cuprinse în domeniul de influenţă şi nu va avea nici un efect asupra celorlalte puncte.

Deoarece soluţia ecuaţiei depinde în mod continuu de condiţiile iniţiale, apare problema formulării corecte a acestor condiţii pentru asigurarea unicităţii soluţiei. O ecuaţie diferenţială hiperbolică, cu condiţii iniţiale date pe o curbă arbitrară C, poartă numele de *problemă Cauchy*. Pentru a exemplifica implicaţiile formulării condiţiilor iniţiale asupra unicităţii soluţiei, să considerăm ecuaţia caracteristică (1.216) având de data aceasta „condiţiile iniţiale" specificate în lungul unei caracteristici:

$$\xi = 0, \quad u(0,\eta) = \varphi(\eta), \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}(0,\eta) = \psi(\eta). \tag{1.223}$$

În vecinătatea lui $\xi = 0$, putem reprezenta funcţia $u(\xi,\eta)$ printr-o serie Taylor:

$$u(\xi,\eta) = u(0,\eta) + \xi\frac{\partial u}{\partial \xi}(0,\eta) + \frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0,\eta) + ... \tag{1.224}$$

Din condiţiile iniţiale, se cunosc $u(0,\eta)$ şi, respectiv, $\partial u/\partial\xi|_{(0,\eta)}$. Ne propunem să determinăm următorul termen din seria (1.224), deci derivata $\partial^2 u/\partial\xi^2|_{(0,\eta)}$. Dacă derivăm ecuaţia caracteristică (1.216) în raport cu ξ şi schimbăm ordinea de derivare, obţinem:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) = 0. \tag{1.225}$$

Soluţia ecuaţiei de mai sus este:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi,\eta) = f(\xi), \tag{1.226}$$

unde $f(\xi)$ este o *funcţie oarecare*, indefinit derivabilă. Rezultă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0,\eta) = f(0). \tag{1.227}$$

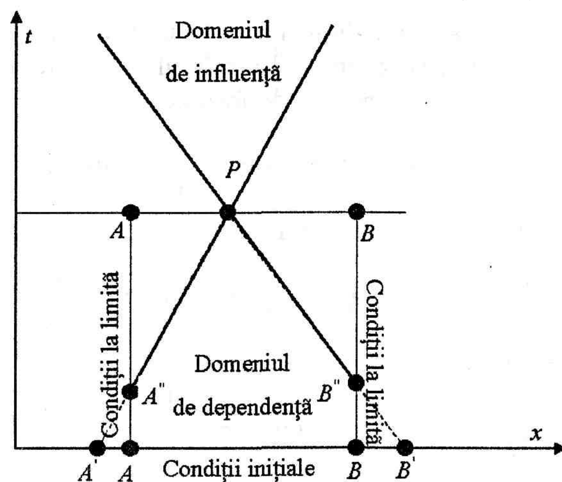


Fig. 1.13. Condiţii la limită pentru ecuaţia undelor.

În acelaşi timp, să observăm că, dacă impunem condiţia ca ecuaţia (1.216) să fie satisfăcută în lungul caracteristicii $\xi = 0$, obţinem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(0, \eta) = 0. \tag{1.228}$$

Dar, din a doua condiţie (1.223), se obţine:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \eta) = \psi^{'}(\eta). \tag{1.229}$$

În consecinţă:

$$\psi^{'}(\eta) = 0, \quad \psi(\eta) = c, \tag{1.230}$$

unde c este o constantă. Înlocuind (1.227) şi (1.230) în (1.224), obţinem:

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\eta) + \xi c + \frac{1}{2}\xi^2 f(0) + \frac{1}{6}\xi^3 f^{'}(0) + \ldots. \tag{1.231}$$

Deci, în vecinătatea lui $\xi = 0$, soluţia este de forma:

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\eta) + g(\xi), \tag{1.232}$$

unde funcţia:

$$g(\xi) = \xi c + \frac{1}{2}\xi^2 f(0) + \frac{1}{6}\xi^3 f^{'}(0) + \ldots, \tag{1.233}$$

nu poate fi complet determinată.

Concluzia este că, *pentru a avea problemă bine pusă,* în sensul ca *soluţia să existe şi să fie unică, condiţiile iniţiale nu vor fi impuse în lungul unei caracteristici.*

Să considerăm acum ca domeniu de integrare intervalul $[A, B]$. Constatăm că, pentru orice $t > 0$, există puncte pentru care picioarele caracteristicilor, la $t = 0$, cad în afara intervalului considerat (fig. 1.13). În consecinţă, pentru ca soluţia în punctele respective să poată fi determinată în mod unic, este necesar ca să înlocuim informaţia de la momentul iniţial, care ar proveni din punctele fictive $A^{'}$ şi, respectiv, $B^{'}$, cu informaţie care provine din $A^{'} \equiv A$ şi, respectiv, $B^{'} \equiv B$, ambele pentru $t > 0$. Altfel spus, este necesar să formulăm *condiţii la limită* pentru ecuaţia diferenţială. Condiţiile la limită au semnificaţia unor *condiţii auxiliare*, care să suplinească informaţia ce ar trebui să provină *din condiţiile iniţiale.*

O primă problemă care apare în formularea corectă a condiţiilor la limită este cea a stabilirii *numărului de condiţii necesare în punctele frontierei* domeniului. Având în vedere că transmiterea informaţiei se face în lungul caracteristicilor, *numărul de condiţii la limită într-un punct de pe frontieră va fi egal cu numărul de caracteristici ce trec prin punctul respectiv şi care sunt orientate spre interiorul domeniului.*

Pentru ecuaţia undelor, vom avea nevoie de *două condiţii la limită*, câte una în fiecare capăt al intervalului de analiză. Forma generală a condiţiilor la limită este (Şabac, [258]):

$$x = x_A,\ a_1 u\left(t, x_A\right) + b_1 \frac{\partial u}{\partial x}\left(t, x_A\right) = u_A(t), \tag{1.234}$$

$$x = x_B,\ a_2 u\left(t, x_B\right) + b_2 \frac{\partial u}{\partial x}\left(t, x_B\right) = u_B(t), \tag{1.235}$$

în care a_1, b_1, a_2, b_2 sunt constante date. Dacă $b_1 = b_2 = 0$ condiţiile la limită se numesc de *tip Dirichlet:*

$$u\left(t, x_A\right) = u_A(t), \quad u\left(t, x_B\right) = u_B(t), \tag{1.236}$$

iar dacă $a_1 = a_2 = 0$, condiţiile la limită sunt de *tip Neumann:*

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(t, x_A\right) = q_A(t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\left(t, x_B\right) = q_B(t), \tag{1.237}$$

unde am notat cu $\boldsymbol{n}$ normala la frontiera domeniului, iar funcţiile date $q_A(t)$ şi $q_B(t)$ au semnificaţia unui *flux* al mărimii u prin frontieră. În cazul general, condiţiile la limită de forma (1.234), (1.235) poartă numele de *condiţii mixte.*

Să observăm că, între condiţiile la limită şi cele iniţiale, există o legătură rezultată din condiţia ca, pe frontiera domeniului, condiţiile iniţiale (1.219) să verifice condiţiile la limită (1.234) şi (1.235):

$$a_1 u_0\left(x_A\right) + b_1 \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x_A} = u_A(0), \quad a_2 u_0\left(x_B\right) + b_2 \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x_B} = u_B(0), \tag{1.238}$$

şi, respectiv:

$$a_1 v_0\left(x_A\right) + b_1 \frac{\partial v_0}{\partial x}\left(x_A\right) = u_A^{'}(0), \quad a_2 v_0\left(t, x_B\right) + b_2 \frac{\partial v_0}{\partial x}\left(x_B\right) = u_B^{'}(0). \tag{1.239}$$

Să reluăm soluţionarea ecuaţiei undelor unidimensionale (1.213), de data aceasta pe intervalul $\left[x_A, x_B\right]$, având condiţiile iniţiale (1.219), iar condiţiile la limită Dirichlet de forma:

$$x = x_A,\ u\left(t, x_A\right) = 0, \tag{1.240}$$

$$x = x_B,\ u\left(t, x_B\right) = 0. \tag{1.241}$$

Compatibilitatea dintre condiţiile iniţiale şi cele la limită impune:

$$u_0(x_A) = u_0(x_B) = 0, \quad v_0(x_A) = v_0(x_B) = 0. \tag{1.242}$$

Metoda tradiţională de rezolvare este *metoda separării variabilelor* (sau *metoda Daniel Bernoulli şi Fourier*): funcţia necunoscută $u\left(x, t\right)$ se descompune în produsul a două funcţii ce depind, fiecare, de o singură variabilă:

$$u\left(x, t\right) = \phi(x)\theta(t). \tag{1.243}$$

Introducând în ecuaţia (1.213), obţinem:

$$\phi(x)\theta^{''}(t) - \alpha^2 \phi^{''}(x)\theta(t) = 0. \tag{1.244}$$

Eliminând soluţia banală ($u \equiv 0$), ecuaţia de mai sus se poate pune sub forma:

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\theta^{''}(t)}{\theta(t)} = \frac{\phi^{''}(x)}{\phi(x)}. \tag{1.245}$$

Deoarece membrul stâng al acestei relaţii este o funcţie ce depinde doar de t, membrul drept, o funcţie ce depinde doar de x, iar relaţia trebuie satisfăcută pentru orice combinaţie a variabilelor independente x, t, rezultă că:

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\theta^{''}(t)}{\theta(t)} = k, \quad \frac{\phi^{''}(x)}{\phi(x)} = k, \tag{1.246}$$

unde k este o constantă.

S-au obţinut două ecuaţii diferenţiale ordinare pentru funcţiile $\phi(x)$ şi $\theta(t)$. Fiecare dintre cele două ecuaţii conduce la probleme de valori proprii ale unor operatori diferenţiali. Într-adevăr, este evident că ecuaţiile (1.246) sunt de forma:

$$L(u) = \lambda u, \tag{1.247}$$

unde:

$$L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}, \quad \lambda = k\alpha^2, \tag{1.248}$$

pentru prima ecuaţie (1.246) şi, respectiv:

$$L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \quad \lambda = k, \tag{1.249}$$

pentru a doua ecuaţie (1.246).

Funcţie de rădăcinile ecuaţiei caracteristice, a doua ecuaţie (1.246) poate avea următoarele soluţii generale:

1) pentru $k > 0$:

$$\phi(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{k}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{k}x}; \tag{1.250}$$

2) pentru $k = 0$:

$$\phi(x) = C_1 + C_2 x; \tag{1.251}$$

3) pentru $k < 0$:

$$\phi(x) = C_1 \sin(\nu x) + C_2 \cos(\nu x), \tag{1.252}$$

unde am notat $\nu^2 = -k$.

Din cele trei situaţii, doar una furnizează o soluţie diferită de soluţia trivială. Varianta corespunzătoare soluţiei nebanale este impusă de *condiţiile la limită*. Pentru cazul de faţă, să observăm că, pentru ca relaţiile (1.241) şi (1.240) să fie satisfăcute pentru orice valoare a timpului t, este *necesar şi suficient* ca:

$$\phi(x_A) = \phi(x_B) = 0. \tag{1.253}$$

În consecinţă, cazurile corespunzătoare lui $k > 0$ şi $k = 0$ conduc la $C_1 = C_2 = 0$, iar în cazul $k < 0$ obţinem:

$$C_1 \sin(\nu x_A) + C_2 \cos(\nu x_A) = 0, \quad C_1 \sin(\nu x_B) + C_2 \cos(\nu x_B) = 0. \tag{1.254}$$

Sistemul fiind omogen, condiţia de soluţie nebanală este:

$$\begin{vmatrix} \sin(\nu x_A) & \cos(\nu x_A) \\ \sin(\nu x_B) & \cos(\nu x_B) \end{vmatrix} = -\sin[\nu(x_B - x_A)] = 0. \tag{1.255}$$

Ecuaţia (1.255) permite determinarea parametrului ν:

$$v_p = p\frac{\pi}{l}, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad l = x_B - x_A, \tag{1.256}$$

iar valorile proprii ale operatorului (1.249) sunt:

$$k_p = -\left(p\frac{\pi}{l}\right)^2, \quad p = 1, 2, \ldots. \tag{1.257}$$

Sistemul (1.254) va avea soluţia 1-nedeterminată:

$$C_{2p} = -C_{1p} \tan(\nu_p x_A) = -C_{1p} \tan(\nu_p x_B). \tag{1.258}$$

Înlocuind acum în relaţia (1.252), obţinem funcţiile proprii ale operatorului (1.249), cu condiţiile la limită (1.253):

$$\phi_p(x) = \frac{C_{1p}}{\cos(\nu_p x_A)} \sin[\nu_p(x - x_A)] = C_p \sin\left[p\frac{\pi(x - x_A)}{l}\right], \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{1.259}$$

unde am notat $C_p = \dfrac{C_{1p}}{\cos(\nu_p x_A)}$.

Pentru fiecare valoare k_p a parametrului k, soluţia generală a primei ecuaţii (1.246) va fi:

$$\theta_p(t) = C_{3p} \sin\left(p\frac{\pi\alpha}{l}t\right) + C_{4p} \cos\left(p\frac{\pi\alpha}{l}t\right). \tag{1.260}$$

În final, înlocuind (1.260) şi (1.259) în relaţia (1.243), obţinem soluţiile:

$$u_p(x,t) = \left[A_p \sin\left(p\frac{\pi\alpha}{l}t\right) + B_p \cos\left(p\frac{\pi\alpha}{l}t\right)\right] \sin\left[p\frac{\pi(x-x_A)}{l}\right], \quad p = 1,2,\ldots, \tag{1.261}$$

în care am notat:

$$A_p = C_{3p}C_p, \quad B_p = C_{4p}C_p. \tag{1.262}$$

Deoarece ecuaţia (1.213) este liniară şi fiecare dintre funcţiile $u_p(x,t)$ satisface condiţiile la limită (1.240) şi (1.241), putem aplica principiul superpoziţiei, deci putem scrie soluţia însumând soluţiile particulare (1.261):

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} u_p(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \left[A_p \sin\left(p\frac{\pi\alpha}{l}t\right) + B_p \cos\left(p\frac{\pi\alpha}{l}t\right)\right] \sin\left[p\frac{\pi(x-x_A)}{l}\right]. \tag{1.263}$$

Pentru determinarea constantelor A_p şi B_p vom apela la condiţiile iniţiale. Astfel, din prima condiţie (1.219) obţinem:

$$u(x,0) = \sum_{p=1}^{\infty} B_p \sin\left[p\frac{\pi(x-x_A)}{l}\right] = u_0(x), \tag{1.264}$$

iar din a doua relaţie (1.219):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p p\frac{\pi\alpha}{l} \sin\left[p\frac{\pi(x-x_A)}{l}\right] = v_0(x). \tag{1.265}$$

Înmulţim relaţiile de mai sus cu $\sin\left[q\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right]$, $q = 1,2,\ldots$ şi integrăm pe intervalul $[x_A, x_B]$. Vom obţine:

$$\sum_{p=1}^{\infty} B_p \int_{x_A}^{x_B} \sin\left[p\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right] \sin\left[q\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right] \mathrm{d}x = \int_{x_A}^{x_B} u_0(x) \sin\left[q\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right] \mathrm{d}x,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p p\frac{\pi\alpha}{l} \int_{x_A}^{x_B} \sin\left[p\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right] \sin\left[q\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right] \mathrm{d}x = \int_{x_A}^{x_B} v_0(x) \sin\left[q\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right] \mathrm{d}x\ .$$

Deoarece funcţiile trigonometrice sunt ortogonale, avem relaţiile:

$$\int_{x_A}^{x_B} \sin\left[p\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right] \sin\left[q\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right] \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, \text{dacă } p \neq q, \\ \frac{1}{2}l, \text{dacă } p = q, \end{cases} \tag{1.266}$$

ceea ce ne permite să obţinem:

$$B_p = \frac{2}{l} \int_{x_A}^{x_B} u_0(x) \sin\left[p\frac{\pi(x-x_A)}{l}\right] \mathrm{d}x, \quad A_p = \frac{2}{p\pi\alpha} \int_{x_A}^{x_B} v_0(x) \sin\left[p\frac{\pi(x-x_A)}{l}\right] \mathrm{d}x. \tag{1.267}$$

Relaţiile de mai sus pun în evidenţă faptul că A_p şi B_p sunt coeficienţii dezvoltării în serie Fourier a funcţiilor ce reprezintă condiţiile iniţiale, $v_0(x)$ şi, respectiv, $u_0(x)$. Se ştie că, de regulă, şirul coeficienţilor Fourier este convergent către zero, iar valorile A_p şi B_p scad atunci când p creşte. Această proprietate permite ca, în aplicaţii practice, să trunchiem seria (1.263) la un număr finit de termeni, în funcţie de precizia dorită pentru soluţie.

O altă variantă de soluţionare este bazată pe *analiza Fourier* prezentă în secţiunea 1.3.1. Analiza Fourier ar părea un caz particular al metodei separării variabilelor, în care funcţiile $\varphi(x)$ şi $\theta(t)$ se

presupun de forma unor unde care se propagă în spaţiu, respectiv timp. În fapt, analiza Fourier se dovedeşte mult mai eficientă, pentru că *elimină din start o serie de soluţii care nu au semnificaţie fizică.*

Să considerăm o componentă Fourier a soluţiei de forma:

$$u_p(x,t) = \hat{u}_p e^{i(\nu_p x + \omega_p t)}, \tag{1.268}$$

unde $\hat{u}_p$ este amplitudinea complexă a armonicei p, ν_p numărul de undă, ω_p pulsaţia undei. Să observăm că soluţia ecuaţiei (1.213) este, de fapt, reprezentată de *partea reală* a expresiei (1.268). Introducând (1.268) în ecuaţia (1.213), obţinem:

$$\left(\omega_P^2 - \alpha^2 \nu_p^2\right) \hat{u}_p = 0. \tag{1.269}$$

Din condiţia ca ecuaţia de mai sus să admită o soluţie diferită de soluţia banală se obţine ecuaţia caracteristică:

$$\omega_P^2 - \alpha^2 \nu_p^2 = 0, \tag{1.270}$$

având soluţiile:

$$\omega_P = \pm \alpha \nu_P. \tag{1.271}$$

Înlocuind în (1.268), obţinem:

$$u_p(x,t) = \hat{u}_p e^{i\nu_p(x \pm \alpha t)}. \tag{1.272}$$

Relaţia de mai sus arată că fiecare armonică este o suprapunere liniară a două *familii* de unde, de aceeaşi pulsaţie şi acelaşi număr de undă, dar care se propagă în lungul a două curbe caracteristice distincte, C^+ şi, respectiv, C^-:

$$C^+ : x + \alpha t = \text{const.}, \quad C^- : x - \alpha t = \text{const.}. \tag{1.273}$$

Fie un punct P oarecare din hiperspaţiul (x,t). Domeniul cuprins între caracteristica C^+ şi caracteristica C^-, pentru $t < t_p$, *reprezintă domeniul de dependenţă* al punctului P, *iar* domeniul corespunzător valorilor $t > t_p$, *domeniul de influenţă al punctului* P (fig. 1.12).

Considerând amplitudinea complexă de forma:

$$\hat{u}_p = \hat{u}_{pR} + i\hat{u}_{pI}, \tag{1.274}$$

şi identificând partea reală a armonicei u_p, obţinem:

$$u_p(x,t) = [\hat{u}_{pR}\cos(\nu x) - \hat{u}_{pI}\sin(\nu x)]\cos(\nu\alpha t) - [\hat{u}_{pI}\cos(\nu x) + \hat{u}_{pR}\sin(\nu x)]\sin(\nu\alpha t). \tag{1.275}$$

Impunerea condiţiilor la limită (1.240) şi (1.241) permite specificarea parametrului ν_p, şi poate fi interpretată ca o *selecţie*, dintre undele celor două familii, doar a celor care îndeplinesc *restricţiile impuse de aceste condiţii.* Într-adevăr, din condiţiile la limită obţinem:

$$\begin{aligned}
[\hat{u}_{pR}\cos(\nu x_A) - \hat{u}_{pI}\sin(\nu x_A)]\cos(\nu\alpha t) - [\hat{u}_{pI}\cos(\nu x_A) + \hat{u}_{pR}\sin(\nu x_A)]\sin(\nu\alpha t) &= 0,\\
[\hat{u}_{pR}\cos(\nu x_B) - \hat{u}_{pI}\sin(\nu x_B)]\cos(\nu\alpha t) - [\hat{u}_{pI}\cos(\nu x_B) + \hat{u}_{pR}\sin(\nu x_B)]\sin(\nu\alpha t) &= 0.
\end{aligned}$$

Deoarece relaţiile de mai sus trebuie satisfăcute *pentru orice valoare a timpului* t, este *necesar şi suficient* ca:

$$\hat{u}_{pR}\cos(\nu_p x_A) - \hat{u}_{pI}\sin(\nu_p x_A) = 0, \quad \hat{u}_{pR}\cos(\nu_p x_B) - \hat{u}_{pI}\sin(\nu_p x_B) = 0, \tag{1.277}$$

şi, respectiv:

$$\hat{u}_{pI}\cos(\nu x_A) + \hat{u}_{pR}\sin(\nu x_A) = 0, \quad \hat{u}_{pI}\cos(\nu x_B) + \hat{u}_{pR}\sin(\nu x_B) = 0. \tag{1.278}$$

Condiţia de existenţă a unei soluţii distincte de cea banală este ca determinanţii matricelor sistemelor (1.277) şi (1.278) să se anuleze:

$$\begin{vmatrix} \cos(\nu_p x_A) & \pm\sin(\nu_p x_A) \\ \cos(\nu_p x_B) & \pm\sin(\nu_p x_B) \end{vmatrix} = \pm\sin[v_p(x_B - x_A)] = 0. \tag{1.279}$$

Soluţiile acestei ecuaţii sunt:

$$v_p = p\frac{\pi}{l}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad l = x_B - x_A. \tag{1.280}$$

Soluţiile sistemelor (1.277) şi (1.278) sunt:

$$\hat{u}_{pR} = \hat{u}_{pI} \tan\left(p\frac{\pi}{l}x_A\right) = \hat{u}_{pI} \tan\left(p\frac{\pi}{l}x_B\right), \quad \hat{u}_{pI} = -\,\hat{u}_{pR} \tan\left(p\frac{\pi}{l}x_A\right) = -\,\hat{u}_{pR} \tan\left(p\frac{\pi}{l}x_B\right). \tag{1.281}$$

Înlocuind în (1.275), obţinem:

$$u_p(x,t) = \sin\left[p\frac{\pi}{l}(x - x_A)\right]\left[A_p \cos\left(p\frac{\pi}{l}\alpha t\right) + B_p \sin\left(p\frac{\pi}{l}\alpha t\right)\right], \quad p = 1, 2, \dots, \tag{1.282}$$

unde am notat:

$$A_p = -\frac{\hat{u}_{pI}}{\cos\left(p\frac{\pi}{l}x_A\right)}, \quad B_p = -\frac{\hat{u}_{pI}}{\cos\left(p\frac{\pi}{l}x_A\right)}. \tag{1.283}$$

Soluţia (1.282) este identică cu cea obţinută prin metoda separării variabilelor (1.261). În continuare, se procedează la superpoziţia componentelor Fourier şi determinarea coeficienţilor A_p şi B_p din condiţiile iniţiale, obţinând expresiile (1.267).

1.9.3. Ecuaţii parabolice

În cazul parabolic, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, iar ecuaţia caracteristică (1.183) are o rădăcină reală dublă, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{b}{2a}$. Vom construi o transformare geometrică de forma:

$$\xi = \lambda x + y, \quad \eta = x + \alpha y, \tag{1.284}$$

care satisface condiţia (1.189), unde α este un parametru oarecare. Vom avea:

$$\xi_x = \lambda, \quad \xi_y = 1, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_y = \alpha, \tag{1.285}$$

şi, înlocuind în (1.192), obţinem:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = a + b\alpha + c\alpha. \tag{1.286}$$

Forma canonică a ecuaţiei parabolice va fi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + G\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right) = 0, \tag{1.287}$$

unde:

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right) = \frac{1}{a + b\alpha + c\alpha^2} F\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right). \tag{1.288}$$

Exemplu. Să considerăm ecuaţia de difuzie (1.2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x_A < x < x_B, \tag{1.289}$$

având condiţia iniţială:

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{1.290}$$

Rezolvarea se poate face atât prin metoda *separării variabilelor, cât şi prin analiza Fourier.* Vom prezenta, în cele ce urmează, doar rezolvarea prin analiză Fourier.

Considerăm o armonică p a soluţiei de forma:

$$u_p(x,t) = \hat{u}_p \mathrm{e}^{\omega_p t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu_p x}, \tag{1.291}$$

ceea ce conduce la ecuaţia de valori proprii:

$$\left(\omega_p + \alpha \nu_p^2\right) \hat{u}_p = 0. \tag{1.292}$$

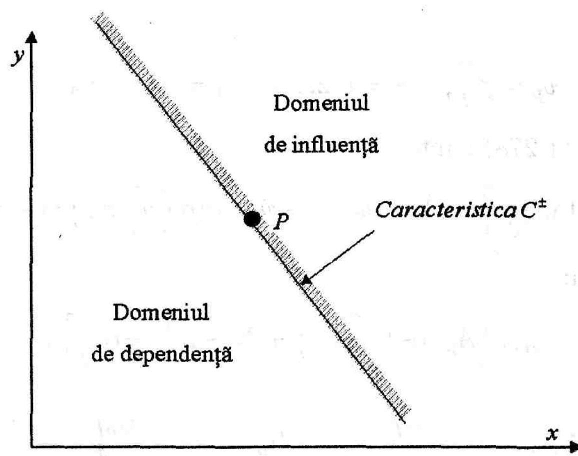


Fig. 1.14. Domeniul de dependenţă şi domeniul de influenţă pentru ecuaţii parabolice.

Din ecuaţia caracteristică, $\omega_p + \alpha\nu_p^2 = 0$, obţinem:

$$\omega_p = -\alpha\nu_p^2, \tag{1.293}$$

iar soluţia (1.291) devine:

$$u_p(x,t) = \hat{u}_p \mathrm{e}^{-\alpha\nu_p^2 t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu_p x}, \tag{1.294}$$

care reprezintă o *undă amortizată* care se propagă în spaţiu, cu numărul de undă ν_p. Printr-un punct arbitrar P din hiperspaţiul (x,t) trece o singură caracteristică, definită de:

$$t = t_P = \text{const.}. \tag{1.295}$$

Domeniul $[x_A, x_B] \times [0, t_P]$ reprezintă domeniul de dependenţă al punctului P, iar domeniul $[x_A, x_B] \times$ $\times [t_P, \infty]$, domeniul de influenţă al acestuia. Analiza caracteristicilor în punctele frontierei arată necesitatea formulării unei condiţii la limită în fiecare punct al frontierei. Pentru cazul de faţă, să considerăm următoarele condiţii la limită:

$$x = x_A,\ u(t, x_A) = 0, \quad x = x_B,\ u(t, x_B) = 0. \tag{1.296}$$

Considerând amplitudinea complexă de forma (1.274), vom identifica partea reală din (1.294):

$$u_p(x,t) = \mathrm{e}^{-\alpha\nu_p^2 t}\left[\hat{u}_{pR}\cos(\nu_p x) - \hat{u}_{pI}\sin(\nu_p x)\right]. \tag{1.297}$$

Impunem condiţiile la limită (1.296) şi obţinem sistemul omogen (1.277). Din condiţia ca acesta să admită o soluţie diferită de cea trivială, rezultă:

$$\nu_p = p\frac{\pi}{l}, \quad l = x_B - x_A, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{1.298}$$

şi, respectiv:

$$\hat{u}_{pI} = \hat{u}_{pR}\tan(\nu_p x_A) = \hat{u}_{pR}\tan(\nu_p x_B). \tag{1.299}$$

Introducem aceste rezultate în (1.297) şi obţinem:

$$u_p(x,t) = \frac{\hat{u}_{pI}}{\cos\left(p\frac{\pi}{l}x_A\right)}\mathrm{e}^{-\alpha\left(p\frac{\pi}{l}\right)^2 t}\sin\left[p\frac{\pi}{l}(x - x_A)\right], \tag{1.300}$$

sau:

$$u_p(x,t) = A_p \mathrm{e}^{-\alpha\left(p\frac{\pi}{l}\right)^2 t}\sin\left[p\frac{\pi}{l}(x - x_A)\right], \quad A_p = \frac{\hat{u}_{pI}}{\cos\left(p\frac{\pi}{l}x_A\right)}. \tag{1.301}$$

Suprapunând componentele Fourier, rezultă soluţia ecuaţiei de difuzie (1.289):

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \mathrm{e}^{-\alpha\left(p\frac{\pi}{l}\right)^2 t}\sin\left[p\frac{\pi}{l}(x - x_A)\right]. \tag{1.302}$$

Impunând condiţia iniţială (1.290) , obţinem:

$$u(x,0)=\sum_{p=1}^{\infty}A_p\sin\left[p\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right]=u_0(x). \tag{1.303}$$

Înmulţim relaţia de mai sus cu $\sin\left[q\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right]$, $q=1,2,\ldots$, şi integrăm pe intervalul $[x_A,x_B]$ rezultă:

$$\sum_{p=1}^{\infty}A_p\int_{x_A}^{x_B}\sin\left[p\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right]\sin\left[q\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right]\mathrm{d}x=\int_{x_A}^{x_B}u_0(x)\sin\left[q\frac{\pi}{l}(x-x_A)\right]\mathrm{d}x. \tag{1.304}$$

Deoarece funcţiile trigonometrice sunt ortogonale, are loc relaţia (1.266) şi obţinem:

$$A_p=\frac{2}{l}\int_{x_A}^{x_B}u_0(x)\sin\left[p\frac{\pi(x-x_A)}{l}\right]\mathrm{d}x. \tag{1.305}$$

În cazul în care domeniul spaţial de integrare este nemărginit, $-\infty<x<+\infty$, parametrul ν_p nu mai poate lua un *număr discret şi numărabil de valori*. În această situaţie trebuie să admitem că ν_p are puterea continuului, iar sumarea armonicelor de forma (1.297) se transformă într-o integrală peste toate valorile parametrului ν_p:

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\nu_p^2t}\left[\hat{u}_{pR}\cos(\nu_px)-\hat{u}_{pI}\sin(\nu_px)\right]\mathrm{d}\nu_p. \tag{1.306}$$

Din condiţia iniţială (1.290) , obţinem:

$$\int_0^{\infty}\left[\hat{u}_{pR}\cos(\nu_px)-\hat{u}_{pI}\sin(\nu_px)\right]\mathrm{d}\nu_p=u_0(x). \tag{1.307}$$

Reprezentând funcţia $u_0(x)$ prin formula integrală Fourier, avem:

$$u_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\nu_p\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\cos\left[\nu_p(x-\xi)\right]\mathrm{d}\xi \tag{1.308}$$

sau, dezvoltând:

$$u_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos(\nu_px)\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\cos(\nu_p\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\nu_p-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\sin(\nu_px)\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\sin(\nu_p\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\nu_p. \tag{1.309}$$

Deoarece condiţia (1.307) trebuie satisfăcută pentru orice valoare x, comparând (1.306) cu (1.309), putem lua:

$$\hat{u}_{pR}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\cos(\nu_p\xi)\,\mathrm{d}\xi\quad\hat{u}_{pI}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\sin(\nu_p\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.310}$$

Introducând aceste rezultate în (1.306) , obţinem soluţia:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\nu_p^2t}\cos(\nu_px)\,\mathrm{d}\nu_p\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\cos(\nu_p\xi)\,\mathrm{d}\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\nu_p^2t}\sin(\nu_px)\,\mathrm{d}\nu_p\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\sin(\nu_p\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\nu_p^2t}\mathrm{d}\nu_p\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\cos\left[\nu_p(x-\xi)\right]\mathrm{d}\xi,$$

sau, schimbând ordinea de integrare:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\nu_p^2t}\cos\left[\nu_p(x-\xi)\right]\mathrm{d}\nu_p. \tag{1.311}$$

Ultima integrală din (1.311) admite o reprezentare analitică, dată de formula Poisson:

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\nu_p^2t}\cos\left[\nu_p(x-\xi)\right]\mathrm{d}\nu_p=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}\right), \tag{1.312}$$

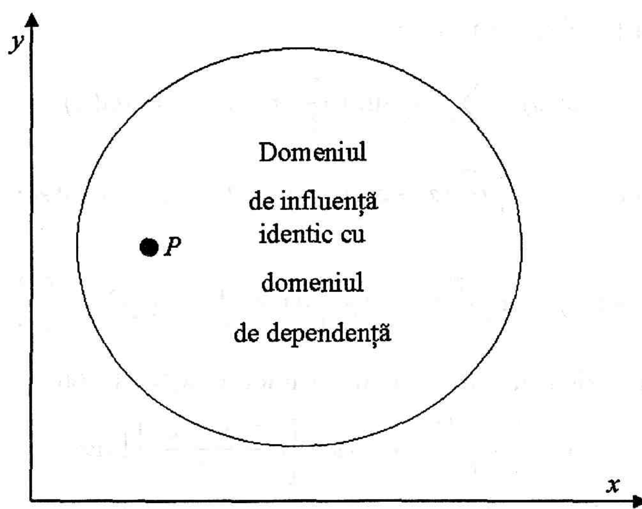


Fig. 1.15. Domeniul de dependenţă şi domeniul de influenţă pentru ecuaţii eliptice.

ceea ce permite exprimarea soluţiei (1.311) în forma compactă:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}\right) \mathrm{d}\xi. \tag{1.313}$$

Acest rezultat poate fi generalizat direct pentru cazul multidimensional.

1.9.4. Ecuaţii eliptice

Pentru ecuaţiile de tip eliptic, avem $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, iar ecuaţia caracteristică are rădăcini complex conjugate:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}. \tag{1.314}$$

Construim transformarea geometrică:

$$y + \lambda_1 x = \xi + \mathrm{i}\eta, \quad y + \lambda_2 x = \xi - \mathrm{i}\eta, \tag{1.315}$$

sau, explicitând ξ şi η:

$$\xi = y + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)x, \quad \eta = -\mathrm{i}\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)x. \tag{1.316}$$

Metricele transformării vor fi:

$$\xi_x = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{b}{2a}, \quad \xi_y = 1, \quad \eta_x = -\mathrm{i}\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad \eta_y = 0, \tag{1.317}$$

iar relaţiile (1.192), devin:

$$A = -\frac{\Delta^2}{4a}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{\Delta^2}{4a}. \tag{1.318}$$

Înlocuind acum în (1.191), se obţine forma canonică a ecuaţiei eliptice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + G\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right) = 0, \tag{1.319}$$

unde:

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right) = -\frac{4a}{\Delta^2} F\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right). \tag{1.320}$$

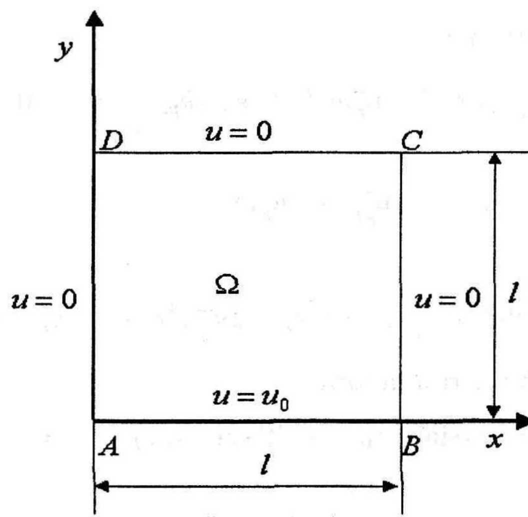


Fig. 1.16. Domeniul de integrare şi condiţii la limită pentru ecuaţia Laplace.

Exemplu. Să considerăm ecuaţia Laplace pentru funcţia $u(x, y)$ pe interiorul domeniului bidimensional Ω:$[0, l] \times [0, l]$, fig. 1.16:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.321}$$

având următoarele condiţii la limită pe frontieră:

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(x, l) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{1.322}$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(l, y) = 0, \quad 0 < y < l, \tag{1.323}$$

Rezolvarea problemei o vom face pe baza analizei Fourier. Să considerăm o armonică a soluţiei de forma:

$$u_p(x, y) = \hat{u}_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{px}x + k_{py}y)}. \tag{1.324}$$

Introducând în (1.321) obţinem ecuaţia de valori proprii:

$$\left(k_{px}^2 + k_{py}^2\right) \hat{u}_p = 0. \tag{1.325}$$

De aici rezultă:

$$k_{py} = \pm \mathrm{i} k_{px}, \tag{1.326}$$

iar soluţia (1.324) devine:

$$u_p(x, y) = \hat{u}_p^+ \mathrm{e}^{k_{px}y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{px}x} + \hat{u}_p^- \mathrm{e}^{-k_{px}y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{px}x}. \tag{1.327}$$

Dacă punem $\hat{u}_p^\pm = \hat{u}_{pR}^\pm + \mathrm{i}\hat{u}_{pI}^\pm$, partea reală a soluţiei de mai sus se scrie:

$$u_p(x, y) = \mathrm{e}^{k_{px}y} \left[u_{pR}^+ \cos(k_{px}x) - u_{pI}^+ \sin(k_{px}x)\right] + \mathrm{e}^{-k_{px}y} \left[u_{pR}^- \cos(k_{px}x) - u_{pI}^- \sin(k_{px}x)\right]. \tag{1.328}$$

Pentru determinarea completă a soluţiei, vom impune condiţiile la limită. Astfel, din prima relaţie (1.323) obţinem:

$$u_p(0, y) = \mathrm{e}^{k_{px}y} u_{pR}^+ + \mathrm{e}^{-k_{px}y} u_{pR}^- = 0, \quad 0 < y < l, \tag{1.329}$$

de unde rezultă:

$$u_{pR}^+ = u_{pR}^- = 0. \tag{1.330}$$

Deci soluţia (1.328) ia forma:

$$u_p(x, y) = \left(u_{pI}^+ \mathrm{e}^{k_{px}y} + u_{pI}^- \mathrm{e}^{-k_{px}y}\right) \sin(k_{px}x). \tag{1.331}$$

Din a doua condiţie (1.322), obţinem:

$$u_p(x,l) = \left(u_{pI}^{+}\mathrm{e}^{k_{px}l} + u_{pI}^{-}\mathrm{e}^{-k_{px}l}\right)\sin\left(k_{px}x\right) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{1.332}$$

ceea ce conduce la:

$$u_{pI}^{-} = -u_{pI}^{+}\mathrm{e}^{2k_{px}l}. \tag{1.333}$$

Înlocuind în (1.331) , obţinem:

$$u_p(x,y) = u_{pI}^{+}\left(\mathrm{e}^{k_{px}y} - \mathrm{e}^{2k_{px}l}\mathrm{e}^{-k_{px}y}\right)\sin\left(k_{px}x\right) = 2u_{pI}^{+}\mathrm{e}^{k_{px}l}\sinh\left[k_{px}\left(y-l\right)\right]\sin\left(k_{px}x\right). \tag{1.334}$$

Relaţia de mai sus poate fi rescrisă în forma:

$$u_p(x,y) = A_p\sinh\left[k_{px}\left(y-l\right)\right]\sin\left(k_{px}x\right), \quad p = 1,2,\ldots, \tag{1.335}$$

unde am notat:

$$A_p = 2u_{pI}^{+}\mathrm{e}^{p\pi}. \tag{1.336}$$

Impunând a doua condiţie (1.323) rezultă:

$$u_p(l,y) = A_p\sinh\left[k_{px}\left(y-l\right)\right]\sin\left(k_{px}l\right) = 0, \quad 0 < y < l. \tag{1.337}$$

Deoarece soluţia $A_p = 0$ nu interesează, obţinem ecuaţia:

$$\sin\left(k_{px}l\right) = 0, \tag{1.338}$$

care permite determinarea parametrului k_{px}:

$$k_{px} = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 1,2,\ldots \tag{1.339}$$

Soluţia ecuaţiei (1.321) se va obţine aplicând superpoziţia soluţiilor (1.337), unde k_{px} este dat (1.339):

$$u(x,y) = \sum_{p=1}^{\infty} u_p(x,y) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p\sinh\left[p\pi\left(\frac{y}{l}-1\right)\right]\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right). \tag{1.340}$$

Pentru a determina coeficienţii A_p vom aplica condiţia la limită (1.322):

$$u(x,0) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p\sinh\left(-p\pi\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right) = u_0. \tag{1.341}$$

Înmulţind relaţia de mai sus cu $\sin\left(\frac{q\pi}{l}x\right)$, $q = 1,2,\ldots$, şi integrând pe intervalul $[0,l]$ rezultă:

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p\sinh\left(-p\pi\right)\int_0^l \sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{q\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x = u_0\int_0^l \sin\left(\frac{q\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x. \tag{1.342}$$

Deoarece funcţiile trigonometrice sunt ortogonale, obţinem:

$$A_p\sinh\left(-p\pi\right)\frac{l}{2} = -u_0 l\frac{\cos p\pi - 1}{p\pi}, \quad A_p = \frac{2u_0}{\sinh\left(p\pi\right)}\left[\frac{(-1)^p - 1}{p\pi}\right]. \tag{1.343}$$

În concluzie, soluţia ecuaţiei Laplace pe pătratul de latură l şi condiţiile la limită (1.322) şi (1.323) este:

$$u(x,y) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh\left(p\pi\right)}\left[\frac{(-1)^p - 1}{p}\right]\sinh\left[p\pi\left(\frac{y}{l}-1\right)\right]\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right). \tag{1.344}$$

Este evident că soluţia în orice punct al domeniului este unic determinată de condiţiile la limită de pe frontieră, ceea ce justifică denumirea de *problemă de domeniu.*

1.10. REPREZENTĂRI INTEGRALE ALE SOLUŢIILOR

Foarte utile în aplicaţiile numerice, în special în probleme de aerodinamică liniară, se dovedesc a fi reprezentările integrale ale soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale. Vom prezenta în cele ce urmează reprezentările integrale ale soluţiei ecuaţiei Laplace (1.13) şi ale soluţiei ecuaţiei Prandtl-Glauert (1.14), care stau la baza metodelor cu panouri pentru integrarea ecuaţiei liniare a potenţialului de perturbaţie.

1.10.1. Ecuaţia Laplace

Deoarece problema Laplace este o problemă de domeniu, se poate determina o reprezentare integrală a soluţiei, funcţie de condiţiile de pe frontieră. Astfel, se cunoaşte că, dacă f, g sunt două funcţii derivabile de două ori şi cu derivata a doua continuă, (f, g sunt de clasă C^2), pe un domeniu τ mărginit de frontiera σ, atunci putem aplica a doua *formulă Green* (Şabac, [258]):

$$\int_\tau (f\Delta g - g\Delta f)\,\mathrm{d}\tau = -\int_\sigma (f\nabla g - g\nabla f)\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma, \tag{1.345}$$

unde $\boldsymbol{n}$ este normala la frontiera σ, orientată spre interiorul volumului τ.

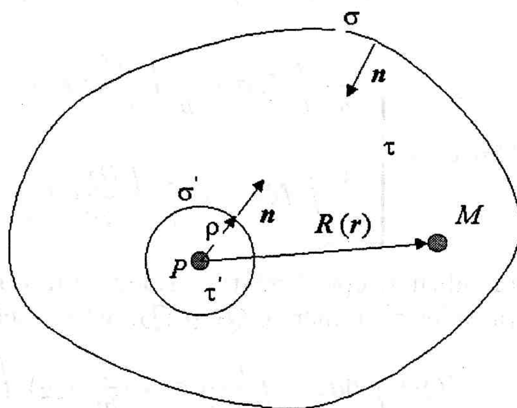


Fig. 1.17. Domeniul de integrare pentru ecuaţia Laplace.

Una din funcţiile f sau g se alege ca o soluţie particulară a ecuaţiei Laplace. Se poate verifica imediat că funcţia:

$$g = \begin{cases} \dfrac{1}{R}, & \text{dacă problema este tridimensională (cazul 3D)}, \\ \ln\dfrac{1}{r}, & \text{dacă problema este bidimensională (cazul 2D)}, \end{cases} \tag{1.346}$$

unde:

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \tag{1.347}$$

este *funcţie armonică*. R sau r reprezintă distanţa euclidiană de la un punct fixat P la punctul arbitrar M din domeniul τ. Funcţia g definită de (1.346) poate fi interpretată ca *potenţialul, în punctul M, al unei surse plasată în P* şi este considerată ca *soluţie fundamentală a ecuaţiei Laplace.*

Să observăm că g îndeplineşte condiţiile de continuitate impuse de teorema Green în toate punctele domeniului τ, mai puţin în punctul P. Vom izola acest punct cu o bulă τ' de rază ρ, şi vom aplica teorema Green pe domeniul $\tau \setminus \tau'$:

$$-\int_{\tau\setminus\tau'} g\Delta f\mathrm{d}\tau = -\int_\sigma (f\nabla g - g\nabla f)\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma - \int_{\sigma'} (f\nabla g - g\nabla f)\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma. \tag{1.348}$$

Să evaluăm integrala pe frontiera σ'. Normala la frontieră, orientată spre interiorul domeniului de integrare, este:

$$\boldsymbol{n} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{R}}{R} = \dfrac{\boldsymbol{R}}{\rho}, \text{ în cazul 3D,} \\ \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\rho}, \text{ în cazul 2D,} \end{cases} \tag{1.349}$$

iar într-un punct al frontierei σ' putem scrie:

$$\nabla g = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3} = \dfrac{\boldsymbol{R}}{\rho^3}, \text{ în cazul 3D,} \\ \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\rho^2}, \text{ în cazul 2D.} \end{cases} \tag{1.350}$$

Prin urmare, într-un punct de pe σ' vom avea:

$$(f\nabla g - g\nabla f)\,\boldsymbol{n} = \begin{cases} f\dfrac{\boldsymbol{R}}{\rho^3}\dfrac{\boldsymbol{R}}{\rho} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial n} = f\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{\partial f}{\partial n}\dfrac{1}{\rho}, \text{ cazul 3D,} \\ f\dfrac{\boldsymbol{r}}{\rho^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{\rho} - \dfrac{\partial f}{\partial n}\ln\dfrac{1}{\rho} = f\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{\partial f}{\partial n}\ln\dfrac{1}{\rho}, \text{ cazul 2D,} \end{cases} \tag{1.351}$$

de unde:

$$\int\limits_{\sigma'} (f\nabla g - g\nabla f)\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\displaystyle\int\limits_{\sigma'} f\mathrm{d}\sigma - \dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int\limits_{\sigma'} \dfrac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma, \text{ în cazul 3D,} \\ \dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int\limits_{\sigma'} f\mathrm{d}\sigma - \ln\dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int\limits_{\sigma'} \dfrac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma, \text{ în cazul 2D.} \end{cases} \tag{1.352}$$

Pentru a calcula integralele din membrul drept al relaţiei (1.352) vom aplica o teoremă de medie, care ne asigură că există, pe suprafaţa bulei σ', punctele Q_1 şi Q_2, astfel încât:

$$\int\limits_{\sigma'} f\mathrm{d}\sigma = f(Q_1)\int\limits_{\sigma'}\mathrm{d}\sigma, \quad \int\limits_{\sigma'}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma = \frac{\partial f}{\partial n}(Q_2)\int\limits_{\sigma'}\mathrm{d}\sigma, \tag{1.353}$$

iar:

$$\int\limits_{\sigma'}\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 4\pi\rho^2, \text{ cazul 3D,} \\ 2\pi\rho, \text{ cazul 2D.} \end{cases} \tag{1.354}$$

Înlocuind în (1.352), obţinem:

$$\int\limits_{\sigma'} (f\nabla g - g\nabla f)\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 4\pi f(Q_1) - 4\pi\rho\dfrac{\partial f}{\partial n}(Q_2), \text{ în cazul 3D,} \\ 2\pi f(Q_1) - 2\pi\rho\dfrac{\partial f}{\partial n}(Q_2)\ln\dfrac{1}{\rho}, \text{ în cazul 2D,} \end{cases} \tag{1.355}$$

şi, deoarece f este continuă iar $\dfrac{\partial f}{\partial n}(Q_2)$ rămâne mărginit în orice punct al suprafeţei σ', vom avea:

$$\lim_{\rho\to 0} f(Q_1) = f(P), \quad \lim_{\rho\to 0}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial n}(Q_2)\right) = 0, \quad \lim_{\rho\to 0}\left(\rho\ln\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial n}(Q_2)\right) = 0. \tag{1.356}$$

Introducând în (1.355), obţinem:

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\sigma'} (f\nabla g - g\nabla f)\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 4\pi f(P), \text{ în cazul 3D,} \\ 2\pi f(P), \text{ în cazul 2D.} \end{cases} \tag{1.357}$$

Aplicând acelaşi proces de trecere la limită în relaţia (1.348), obţinem:

$$f(P)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi}\left[\displaystyle\int_{\sigma}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial n}-f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}\sigma+\int_{\tau}\frac{1}{R}\Delta f\mathrm{d}\tau\right], \text{ în cazul 3D,}\\ -\dfrac{1}{2\pi}\left[\displaystyle\int_{\sigma}\left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial n}-f\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}\sigma+\int_{\tau}\ln\frac{1}{r}\Delta f\mathrm{d}\tau\right], \text{ în cazul 2D.}\end{cases} \tag{1.358}$$

Relaţia de mai sus poartă numele de *formula celor trei potenţiale,* deoarece primul termen din membrul drept al egalităţii poate fi interpretat ca fiind potenţialul unei *distribuţii de surse* (numit şi potenţial de simplu strat), al doilea ca *potenţialul unei distribuţii de dublete* (sau potenţial de dublu strat), iar ultimul reprezintă *potenţialul newtonian.*

Dacă funcţia f este armonică pe τ, atunci $\Delta f=0$ şi relaţia (1.358) devine:

$$f(P)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\sigma}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial n}-f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}\sigma, \text{ în cazul 3D,}\\ -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\sigma}\left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial n}-f\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}\sigma, \text{ în cazul 2D.}\end{cases} \tag{1.359}$$

Observaţii. 1) Relaţia (1.359) reprezintă soluţia integrală a ecuaţiei Laplace pe domeniul τ mărginit de suprafaţa σ.

2) Domeniul τ poate fi mărginit în cazul unei *probleme Laplace interioare,* sau nemărginit pentru o *problemă Laplace exterioară.*

3) În cazul în care condiţiile la limită specifică valorile funcţiei f în orice punct al frontierei σ, soluţionarea ecuaţiei Laplace poartă numele de *problemă de tip Dirichlet.*

4) Dacă pe suprafaţa σ condiţiile la limită se referă la derivata funcţiei f pe direcţia normalei, $\dfrac{\partial f}{\partial n}$, rezolvarea ecuaţiei Laplace poartă numele de *problemă de tip Neumann.*

5) Problema Dirichlet are soluţie unică; în schimb soluţia problemei Neumann exterioare este determinată cu precizia unei constante aditive (Şabac, [258]).

1.10.2. Ecuaţia Prandtl-Glauert

Metoda prezentată în secţiunea anterioară pentru determinarea reprezentării integrale a soluţiei ecuaţiei Laplace poate fi extinsă pentru *ecuaţia Prandtl-Glauert:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1.360}$$

Ecuaţia *hiperbolică* (1.360) se întâlneşte în modelul potenţialului de perturbaţie în regim supersonic, iar soluţia ei poate fi scrisă în formă integrală.

Definind operatorul diferenţial:

$$\Box\cdot=\frac{\partial^2\cdot}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\cdot}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\cdot}{\partial z^2}, \tag{1.361}$$

a doua formulă Green (1.345) poate fi scrisă (Heaslet şi Lomax, [263]):

$$\int_{\tau}(f\Box g-g\Box f)\,\mathrm{d}\tau=-\int_{\sigma}(f\nabla g-g\nabla f)\,\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}\sigma, \tag{1.362}$$

unde funcţiile f şi g sunt presupuse de clasă C^2 pe domeniul τ mărginit de suprafaţa σ. Vectorul $\boldsymbol{\nu}$ se numeşte *conormală* la suprafaţă şi este definit în funcţie de componentele normalei $\boldsymbol{n}$:

$$\nu_1=-n_1,\quad \nu_2=n_2,\quad \nu_3=n_3. \tag{1.363}$$

O soluţie particulară a ecuaţiei (1.360) este *soluţia lui Volterra*, [294], pentru unde tridimensionale:

$$g_1 = \cosh^{-1} \frac{x-\xi}{\left[(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{1/2}} = \ln \left| \frac{x-\xi+\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2}}{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \right|. \qquad (1.364)$$

Dacă vom nota:

$$r = \sqrt{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r_H = \sqrt{(x-\xi)^2 - r^2}, \qquad (1.365)$$

funcţia g_1 se scrie:

$$g_1(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = \operatorname{arccosh} \frac{x-\xi}{r} = \ln \left| \frac{x-\xi+r_H}{r^2} \right|. \qquad (1.366)$$

Se poate verifica imediat că:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{1}{r_H}, \quad \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = \frac{x-\xi}{r_H^3}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{-(x-\xi)(y-\eta)}{r^2 r_H}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial z} = \frac{-(x-\xi)(z-\zeta)}{r^2 r_H}, \qquad (1.367)$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} = (x-\xi)\frac{-(y-\eta)^2\left(r_H^2 - r^2\right) + (z-\zeta)^2 r_H^2}{r^4 r_H^3}, \quad \frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2} = (x-\xi)\frac{-(z-\zeta)^2\left(r_H^2 - r^2\right) + (y-\eta)^2 r_H^2}{r^4 r_H^3}, \qquad (1.368)$$

iar:

$$\Box g_1 = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2} = 0. \qquad (1.369)$$

Funcţia reală g_1 este definită în domeniul în care:

$$(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2 \geq 0, \qquad (1.370)$$

$$(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \neq 0. \qquad (1.371)$$

Condiţia (1.370) arată că, dacă se consideră punctul $P(x,y,z)$ fixat, atunci punctul $M(\xi,\eta,\zeta)$ trebuie să fie situat în interiorul unui con cu vârful în P, suprafaţa acestui con fiind descrisă de ecuaţia:

$$S(\xi,\eta,\zeta) = (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2 = 0. \qquad (1.372)$$

Deşi suprafaţa conică $S(\xi,\eta,\zeta) = 0$ are două pânze, una corespunzătoare valorilor $x \geq \xi$ iar cealaltă valorilor $x \leq \xi$, pentru a păstra semnificaţia fizică a modelului matematic, vom considera o singură pânză: cea pentru care $x \geq \xi$. Vom numi acest con, *conul Mach* (cu vârful în P, fig. 1.18), având semnificaţia de *domeniu de dependenţă al punctului respectiv.*

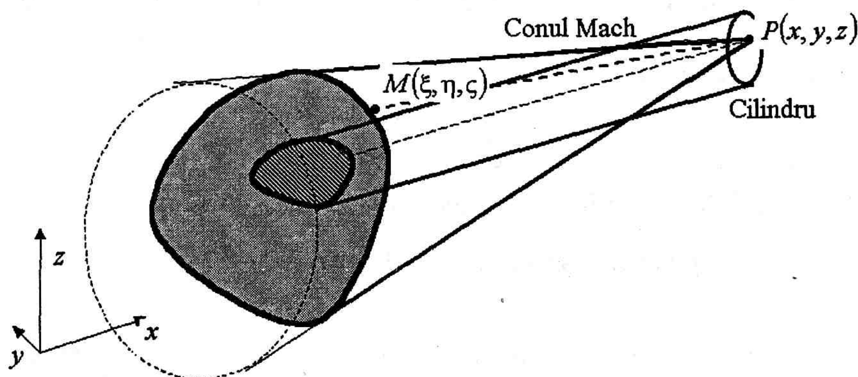


Fig. 1.18. Domeniul de integrare pentru ecuaţia Prandtl-Glauert.

Componentele normalei la suprafaţa conului Mach sunt:

$$n_1 = -\nu_1 = \frac{\partial}{\partial x}S(x,y,z) = 2(x-\xi), \tag{1.373}$$

$$n_2 = \nu_2 = \frac{\partial}{\partial y}S(x,y,z) = -2(y-\eta), \tag{1.374}$$

$$n_3 = \nu_3 = \frac{\partial}{\partial z}S(x,y,z) = -2(z-\zeta). \tag{1.375}$$

Funcţia g_1 şi derivata $\frac{\partial g_1}{\partial \nu}$ sunt nule pe suprafaţa conului Mach. Într-adevăr, pe suprafaţa conului, $(x-\xi)^2 = r^2$, iar (1.364) devine:

$$g_1|_{\text{Conul Mach}} = \cosh^{-1} 1 = 0. \tag{1.376}$$

De asemenea, utilizând relaţiile (1.373) – (1.375) şi, respectiv, (1.367) şi (1.368), vom obţine:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{\text{Conul Mach}} = \nu_1\frac{\partial g_1}{\partial x} + \nu_2\frac{\partial g_1}{\partial y} + \nu_3\frac{\partial g_1}{\partial z} = 0. \tag{1.377}$$

Fie funcţia g definită de:

$$g(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = \begin{cases} g_1, \text{ dacă } (x-\xi)^2 \geq (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2, \\ 0, \text{ dacă } (x-\xi)^2 \leq (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2. \end{cases} \tag{1.378}$$

Funcţia g satisface condiţiile formulei Green, mai puţin în punctele dreptei pentru care:

$$(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = 0, \tag{1.379}$$

sau:

$$\eta = y, \quad \zeta = z. \tag{1.380}$$

Izolăm această dreaptă cu un cilindru circular τ' de rază ρ, având suprafaţa laterală σ' şi aplicăm formula (1.362) pe domeniul $\tau\backslash\tau'$. Deoarece g şi $\frac{\partial g}{\partial v}$ se anulează pe conul Mach şi în exteriorul acestuia, obţinem:

$$-\int\limits_{\text{Conul Mach}} g\Box f \mathrm{d}\tau = -\int\limits_{\sigma_C\backslash\sigma_c} (f\nabla g - g\nabla f)\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}\sigma - \int\limits_{\sigma'} (f\nabla g - g\nabla f)\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}\sigma, \tag{1.381}$$

unde am notat cu σ_C porţiunea din suprafaţa σ cuprinsă în interiorul conului Mach, iar cu σ_c porţiunea din suprafaţa σ cuprinsă în interiorul cilindrului.

Pe suprafaţa σ' a cilindrului circular de rază ρ avem:

$$\nabla g = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \rho^2}}\boldsymbol{i} - \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{\rho^2\sqrt{(x-\xi)^2-\rho^2}}\boldsymbol{j} - \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{\rho^2\sqrt{(x-\xi)^2-\rho^2}}\boldsymbol{k}. \tag{1.382}$$

Conormala la suprafaţa σ' are componentele:

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \frac{y-\eta}{\rho}, \quad \nu_2 = \frac{z-\zeta}{\rho}. \tag{1.383}$$

Deci, pe σ', avem:

$$\boldsymbol{\nu}\nabla g = -\frac{(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \rho^2}}\frac{1}{\rho}, \quad \mathrm{d}\sigma = 2\pi\rho\mathrm{d}\xi. \tag{1.384}$$

Aplicând o teoremă de medie, putem acum evalua:

$$\int_{\sigma'} f\nabla g\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}\sigma = -\int_{\sigma'}\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\rho^2}}\frac{1}{\rho}f\mathrm{d}\sigma = -2\pi\int_{x_0}^{x}\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\rho^2}}f\mathrm{d}\xi, \tag{1.385}$$

$$\int_{\sigma'} g\nabla f\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}\sigma = \int_{\sigma'} g\frac{\partial f}{\partial \nu}\mathrm{d}\sigma = \rho\int_{x_0}^{x}\int_{0}^{2\pi} \operatorname{arccosh}\frac{x-\xi}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\cos\theta + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi. \tag{1.386}$$

Trecând la limită ($\rho \to 0$) în relaţiile (1.385) şi (1.385), şi admiţând că funcţia f împreună cu derivatele ei rămân finite, obţinem:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\sigma'} f\nabla g\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}\sigma = -2\pi\lim_{\rho\to 0}\int_{x_0}^{x}\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\rho^2}}f\mathrm{d}\xi = -2\pi\int_{x_0}^{x} f\mathrm{d}\xi, \tag{1.387}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\sigma'} g\nabla f\tilde{\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{1.388}$$

unde $x_0 < x$ este un punct arbitrar.

Aplicând aceeaşi trecere la limită şi în (1.381) şi admiţând că $\Box f = 0$ în domeniul τ, obţinem:

$$2\pi\int_{x_0}^{x} f\mathrm{d}\xi = -\int_{\sigma_C}(f\nabla g - g\nabla f)\,\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}\sigma, \tag{1.389}$$

de unde:

$$f(P) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_C}\left[f\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\operatorname{arccosh}\frac{x-\xi}{r^2}\right) - \frac{\partial f}{\partial \nu}\operatorname{arccosh}\frac{x-\xi}{r^2}\right]\mathrm{d}\sigma. \tag{1.390}$$

Relaţia de mai sus permite determinarea valorilor funcţiei f, soluţia ecuaţiei Prandtl-Glauert, în punctele unui domeniu, dacă se cunosc valorile ei, împreună cu derivatele pe direcţia conormalei, pe frontiera domeniului.

1.11. CONCLUZII

În secţiunile anterioare am analizat proprietăţile matematice ale principalelor tipuri de ecuaţii şi sisteme diferenţiale cu derivate parţiale, de interes în Mecanica mediilor continue şi, în particular, în Dinamica fluidelor.

Am pus în evidenţă, pentru fiecare tip de problemă: eliptic, parabolic şi hiperbolic, condiţiile în care soluţia există şi poate fi determinată. Am subliniat de fiecare dată necesitatea formulării unei *probleme bine puse* (Hadamard, [122]), *pentru a asigura unicitatea soluţiei,* în sensul că aceasta *depinde în mod continuu de condiţiile iniţiale şi de condiţiile auxiliare* (*la limită*).

O analiză mai în detaliu a vizat proprietăţile ecuaţiilor şi sistemelor diferenţiale neliniare de tip hiperbolic. S-au definit o serie de noţiuni de bază în teoria ecuaţiilor hiperbolice neliniare, cum ar fi: soluţie de tip undă, unde liniare şi unde neliniare, soluţie slabă, unicitate a soluţiei slabe, condiţie de entropie, relaţiile Hugoniot-Rankine, formarea undelor de şoc, unde simple etc. S-a arătat că un sistem hiperbolic admite o soluţie de tip undă. S-au definit variabilele caracteristice şi relaţiile de compatibilitate asociate sistemelor hiperbolice liniare şi neliniare. Variaţiile elementare ale undelor care reprezintă soluţiile sistemelor hiperbolice neliniare pot fi reprezentate ca o combinaţie de unde simple (vectorii proprii ai matricei iacobiene), având amplitudinea dată de variaţiile elementare ale variabilelor caracteristice. S-a pus în evidenţă că, pentru cazul undei neliniare, soluţia sistemului nu are o scară de lungimi distinctă, fiind funcţie doar de variabila $\frac{x}{t}$. Din punct de vedere fizic, această situaţie corespunde unei unde simple, produsă la interfaţa a două stări constante ale fluidului (unda de şoc sau undă de rarefiere). Aceste elemente vor sta la baza înţelegerii algoritmilor numerici ce se vor introduce în capitolele 6, 11 şi 12.

Pe baza reprezentărilor integrale ale soluţiile integrale ale ecuaţiilor Laplace şi Prandtl-Glauert se pot introduce metodele cu elemente de frontieră care vor fi analizate în capitolul 4 şi în paragraful 9.3.

CAPITOLUL 2
CALCULUL CU DIFERENŢE FINITE

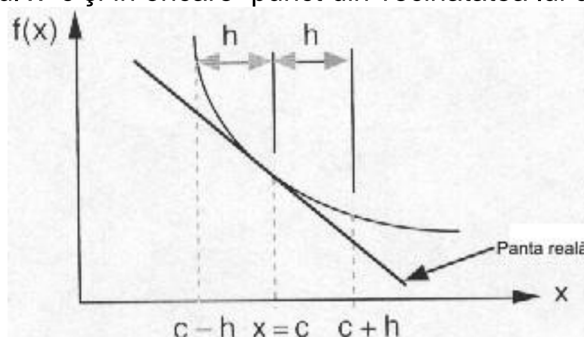
2.1 *Principiile de bază a calculelor prin diferenţe finite*

2.1.1 Noţiuni Introductive

In calculele convenţionale prin diferenţiere a unei funcţii, această operaţie este bine definită, procedura formală cu operaţii puternic dependente de forma funcţiei implicate. Pentru diversitatea de funcţii sunt necesare mai multe tipuri de reguli. În cazul metodelor numerice este utilizat un calculator numeric care poate realiza doar operaţiile aritmetice standard de adunare, scădere, înmulţire, împărţire, exponenţiale şi anumite operaţii logaritmice. Pentru funcţiile diferenţiale avem nevoie de o tehnică care să permită doar operaţii aritmetice. Metoda de calcul prin diferenţe finite satisface aceste necesităţi.

2.1.2 Diferenţiere unidimensională la dreapta

Considerăm funcţia f(x) de tip analitic în vecinătatea unui punct c, respectiv o funcţie care admite o derivată în punctul x=c şi în oricare punct din vecinătatea lui c.



Dorim să căutăm o aproximare a lui:

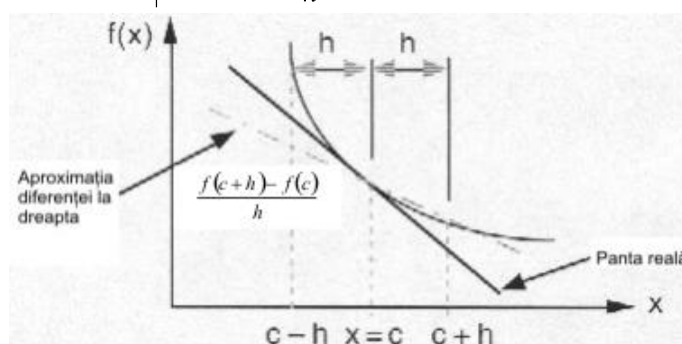
$$f'(x)\big|_{x=c};c\in[a,b]$$

fapt pentru care vom determina o expresie pentru *f(x+h)* prin dezvoltarea în serie Taylor în jurul punctului c:

$$f(c+h)=f(c)+hf'(c)+\frac{h^2}{2!}f''(c)+\frac{h^3}{3!}f'''(c)+\ldots$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-\frac{h}{2}f''(c)-\frac{h^2}{6}f'''(c)-\ldots$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\Big|_{x=c}=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}+O(h)$$



În mod convenţional şi pentru simplificare se adoptă următoarea notaţie:

$$\begin{cases} f(x)\big|_{x=c}\equiv f_j \\ f(x)\big|_{x=c+h}\equiv f_{j+1} \end{cases} \Rightarrow \Delta_f f_j\equiv f_{j+1}-j_j \Rightarrow f'(x)\Big|_{x=c}=\frac{\Delta_f f_j}{h}+O(h)$$

Termenul O(h) poartă denumirea de eroare de trunchiere şi reprezintă mărimea erorii introduse prin aproximarea derivatei cu diferenţe finite şi este proporţională cu $\Delta x=h$.

Pentru a aproxima derivate de ordin mai mare (de ordinul 2) se procedează astfel:

$$f(c+2h) = f(c) + 2hf^{'}(c) + 2h^2 f^{''}(c) + \frac{4h^3}{3} f^{'''}(c) + \ldots$$

$$\Rightarrow f^{'}(c+2h) - 2f(c+h) = -f(c) - h^2 f^{''}(c) - h^3 f^{'''}(c) - \ldots$$

$$\Leftrightarrow f^{''}(x)\Big|_{x=c} = \frac{f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j}{h^2} + O(h) \Leftrightarrow f^{''}(x)\Big|_{x=c} = \frac{\Delta_f^2 j_j}{h^2} + O(h)$$

Prin generalizare pentru derivate de ordinul *n*:

$$f^n(x)\Big|_{x=c} = \frac{\Delta_f^n j_j}{h^n} + O(h)\, unde\, \Delta_f^n f_j = \Delta_f\left(\Delta_f^{n+1} f_j\right)$$

Pentru primele 4 derivate aproximările prin diferenţiere la dreapta sunt:

	f_j	**f_{j+1}**	**f_{j+2}**	**f_{j+3}**	**f_{j+4}**
$hf^{'}(x_j) =$	-1	1			
$h^2 f^{''}(x_j) =$	1	-2	1		
$h^3 f^{'''}(x_j) =$	-1	3	-3	1	
$h^4 f^{''''}(x_j) =$	1	-4	6	-4	1

+O(h)

Incluzând mai mulţi termeni în dezvoltarea în serie Taylor se poate obţine o precizie mai bună. De exemplu:

$$Se\ introduce\ f^{''}(c) = \frac{f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j}{h^2} - hf^{'''}(c)\ in$$

$$f^{'}(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \frac{h}{2} f^{''}(c) - \frac{h^2}{6} f^{'''}(c) - \ldots$$

$$\Rightarrow f^{'}(x)\Big|_{x=c} = \frac{-f_{j+2} + 4f_{j+1} - 3f_j}{2h} + O(h)^2$$

în aşa fel încât:

	f_j	**f_{j+1}**	**f_{j+2}**	**f_{j+3}**	**f_{j+4}**	**f_{j+5}**
$2\,hf^{'}(x_j) =$	-3	4	-1			
$h^2 f^{''}(x_j) =$	2	-5	4	-1		
$2\,h^3 f^{'''}(x_j) =$	-5	18	-24	14	-3	
$h^4 f^{''''}(x_j) =$	3	-14	36	-24	11	-2

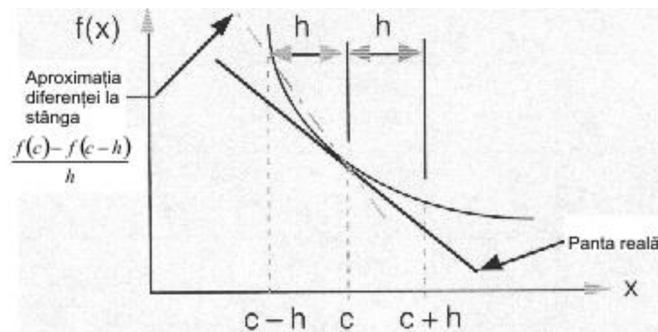
$+O(h)^2$

$$f(c-h) = f(c) - hf^{'}(c) + \frac{h^2}{2!} f^{''}(c) - \frac{h^3}{3!} f^{'''}(c) + \ldots$$

$$\Rightarrow f^{'}(c) = \frac{f(c) - f(c-h)}{h} + \frac{h}{2} f^{''}(c) - \frac{h^2}{6} f^{'''}(c) + \ldots$$

$$\Leftrightarrow f^{'}(x)\Big|_{x=c} = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} + O(h) \Leftrightarrow f^{'}(x)\Big|_{x=c} = \frac{\Delta_b f_j}{h} + O(h)$$

Termenul O(h) poartă denumirea de eroare de trunchiere şi reprezintă mărimea erorii introduse prin aproximarea derivatei cu diferenţe finite şi este de asemenea proporţională cu Δx=h.



Pentru a aproxima derivate de ordin mai mare (de ordinul 2) se procedează similar ca în cazul diferenţierii la dreapta, obţinându-se:

$$f''(x)\Big|_{x=c} = \frac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j=2}}{h^2} + O(h) \Leftrightarrow f''(x)\Big|_{x=c} = \frac{\Delta_b^2 j_j}{h^2} + O(h)$$

Prin generalizare pentru derivate de ordinul n:

$$f^n(x)\Big|_{x=c} = \frac{\Delta_b^n j_j}{h^n} + O(h)\, unde\, \Delta_b^n f_j = \Delta_f\left(\Delta_b^{n-1} f_j\right)$$

Pentru primele 4 derivate aproximările prin diferenţiere la dreapta sunt:

	f_{j-4}	f_{j-3}	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	
$hf'(x_j)=$				-1	1	
$h^2 f''(x_j)=$			1	-2	1	+O(h)
$h^3 f'''(x_j)=$		-1	3	-3	1	
$h^4 f''''(x_j)=$	1	-4	6	-4	1	

Incluzând mai mulţi termeni în dezvoltarea în serie Taylor se poate obţine o precizie mai bună. În acest caz:

$$f'(x)\Big|_{x=c} = \frac{3f_j - 4f_{j-1} + f_{j-2}}{2h} + O(h)^2$$

în aşa fel încât:

	f_{j-5}	f_{j-4}	f_{j-3}	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	
$2\,hf'(x_j)=$				1	-4	3	
$h^2 f''(x_j)=$			-1	4	-5	2	$+O(h)^2$
$2\,h^3 f'''(x_j)=$		3	-14	24	-18	5	
$h^4 f''''(x_j)=$	-2	11	-24	26	-14	3	

2.1.4 Diferenţiere unidimensională în centru

În acest caz:

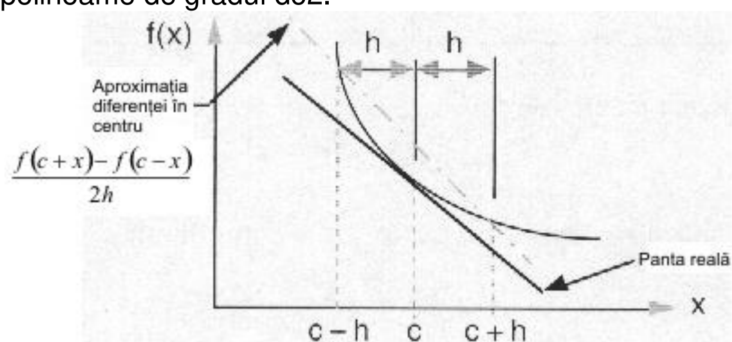
$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2!} f''(c) + \frac{h^3}{3!} f'''(c) + \ldots$$

$$f(c-h) = f(c) - hf'(c) + \frac{h^2}{2!} f''(c) - \frac{h^3}{3!} f'''(c) + \ldots$$

$$\Rightarrow f(c+h) - f(c-h) = 2hf'(c) + \frac{h^3}{3} f'''(c) + \ldots$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(c) - \ldots \Leftrightarrow f'(x)\big|_{x=c} = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} + O(h)^2$$

Această reprezentare diferenţială este de precizie $O(h)^2$ poartă denumirea de reprezentare diferenţială centrată a lui $f'(x)$ în punctul x_j, care nu este implicat direct, iar termenul de eroare este identic ca cel pentru polinoame de gradul do2.



Pentru a aproxima derivate de ordinul 2 se obţine prin calcul, similar ca în paragrafele anterioare:

$$f''(x)\Big|_{x=c} = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j=1}}{h^2} + O(h)^2$$

Eroarea de trunchiere la derivata de ordinul întâi este în acest caz $\Delta(x)^2$, respectiv o îmbunătăţire faţă de aproximările prin diferenţiere la dreapta sau la stânga.

În general valoarea lui f_j apare doar în reprezentarea derivatelor de ordin par, fapt ce poate fi rezumat prin următoarele expresii:

n par	**n impar**
$\frac{d^n f}{dx^n}\Big\|_{x=x_j} = \frac{\Delta_s^n f_{j+0,5n} + \Delta_d^n f_{j-0,5n}}{2h^n} + O(h)^2$	$\frac{d^n f}{dx^n}\Big\|_{x=x_j} = \frac{\Delta_s^n f_{j+0,5(n-1)} + \Delta_d^n f_{j-0,5(n-1)}}{2h^n} + O(h)^2$

Pentru primele 4 derivate aproximările prin diferenţiere centrală a lui $O(h)^2$ sunt:

	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	
$2hf'(x_j)=$		-1	0	1		
$h^2 f''(x_j)=$		1	-2	1		$+O(h)^2$
$2h^3 f'''(x_j)=$	-1	2	0	-2	1	
$h^4 f''''(x_j)=$	1	-4	6	-4	1	

Iar pentru $O(h)^4$:

	f_{j-3}	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	
$2hf'(x_j)=$		1	-8	0	8	-1		
$h^2 f''(x_j)=$		-1	16	-30	16	-1		$+O(h)^4$
$2h^3 f'''(x_j)=$	1	-8	13	0	-13	8	-1	
$h^4 f''''(x_j)=$	-1	12	-39	56	-39	12	-1	

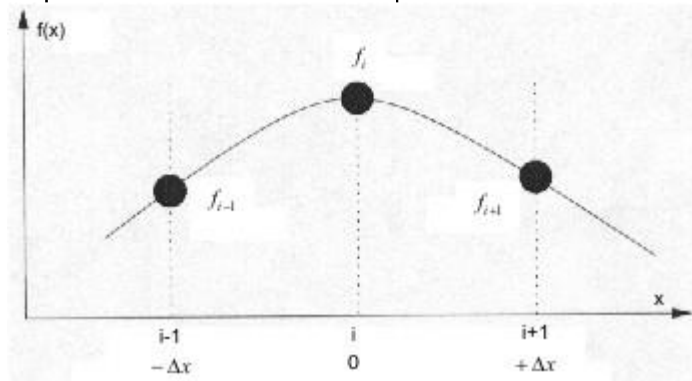
Utilizând teorema lui Taylor pentru o fincţie cu două variabile se obţin urnmătoarele rezultate:

Aproximare prin diferenţiere la dreapta	**Aproximare prin diferenţiere la stânga**
$\frac{\partial f}{\partial x}\Big\|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h} - O(h)$	$\frac{\partial f}{\partial x}\Big\|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h} - O(h)$
Aproximare prin diferenţiere centrală	
$\frac{\partial f}{\partial x}\Big\|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} - O(h)^2$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big\|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} - O(h)^2$
Unde: $f(x_i, x_j) \equiv f_{i,j}$ si $h = x_{i+1} - x_i$	

În mod similar se obţin diferenţe finite pentru aproximarea lui $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{i,j}$ *si* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{i,j}$.

2.2 Diferenţe finite pentru ecuaţii diferenţiale parţiale

Pentru înţelegere prezentăm următorul exemplu:



Aproximarea funcţiei este:

$$f(x) \approx ax^2 + bx + c \approx \left(\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2}\right)x^2 + \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}\right) + f_i$$

Atunci când x=0 primele două derivate a funcţiei sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_i \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} \end{cases}$$

O ecuaţie diferenţială se numeşte cvasilineară dacă este lineară în derivatele cele mai ridicate. O ecuaşie cvasilineară de ordinul doi, cu două variabile independente şi în care funcţia necunoscută este u, este:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

funcţie ce poate fi clasificată în trei categorii:

De tip eliptic (ecuaţia Laplace şi Poisson)	De tip parabolic (conducţia termică)	De tip hiperbolic (ecuaţia undei)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g$	$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
$ac - b^2 \geq 0$	$ac - b^2 = 0$	$ac - b^2 \leq 0$
În probleme de echilibru.	În cazul problemelor de propagare.	

Probleme de echilibru	**Probleme de propagare**
Ecuaţia diferenţială $Du = f$ pe un domeniu închis Ω Condiţiile de frontieră $Bu = g$ pe marginea $\partial\Omega$	Ecuaţia diferenţială $D(u) = f$ pe un domeniu deschis Ω Condiţiile de frontieră $B(u) = g$ pe marginea $\partial\Omega$ Timp Spaţiu Condiţii iniţiale $I(u) = h$
Acestea sunt probleme de regim staţionar şi sunt cunoscute ca probleme cu valori de margine pe un domeniu închis.	Acestea sunt probleme de regim nestaţionar(tranzitoriu) şi sunt

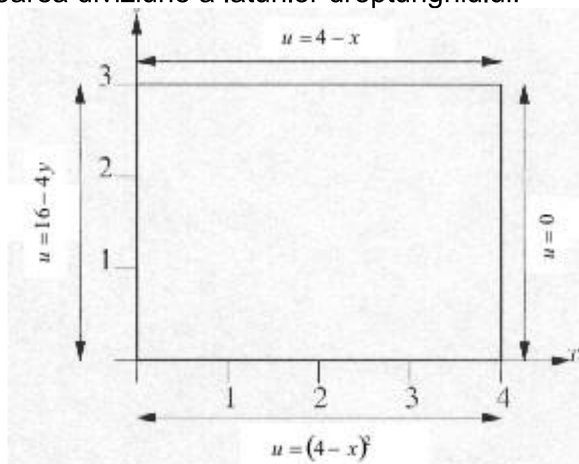
<table>
<tr>
<td>
Condiţiile obişnuite de margine, ce pot fi specificate unic, sunt:
<table>
<tr><th>Dirichlet</th><th>Neumann</th><th>Robin (mixte)</th></tr>
<tr><td>Valorile lui u la margine sunt specificate.</td><td>Valorile derivatei normale la margine $\frac{\partial u}{\partial n}$ sunt specificate.</td><td>Combinaţia lineară dintre valorile şi derivatele normale sunt specificate.</td></tr>
</table>
Exemple:
• Curgerea în regim vâscos staţionar
• Distribuţia câmpului de temperatură
• Forţe de echilibru în structuri elastice,
• Distribuţia tensiunilor electrice
</td>
<td>
cunoscute ca probleme cu valori iniţiale de frontieră şi cu condiţii de frontieră pe un domeniu deschis.
Exemple:
• Propagarea undei de presiune în fluid
• Propagarea căldurii
• Propagarea tensiunilor mecanice şi deplasarea în sisteme elastice
• Propagarea undelor electromagnetice
</td>
</tr>
</table>

2.2.1 Ecuaţii diferenţiale pentru probleme de echilibru

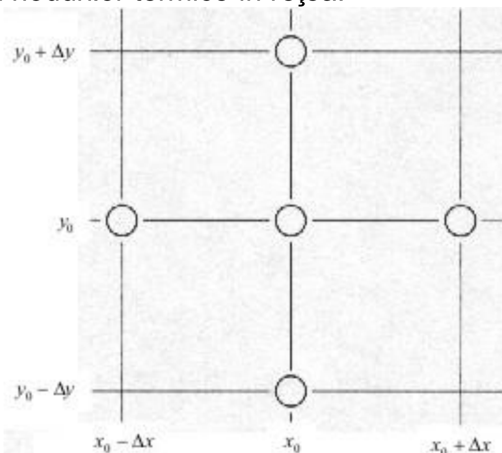
Considerăm ecuaţia lui Laplace privind distribuţia de temperatură într-o placă dreptunghiulară dintr-un material omogen, într-un sistem de coordonate bidimensional de tip cartezian:

$$\nabla^2 u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

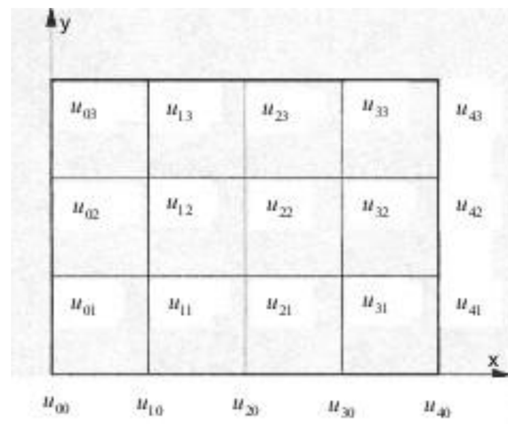
Considerăm următoarea diviziune a laturilor dreptunghiului:



şi următorul mod de definire a nodurilor termice în reţea:



În toate nodurile de pe frontieră sunt definite şi urmează a determina temperaturile în nodurile din interior.

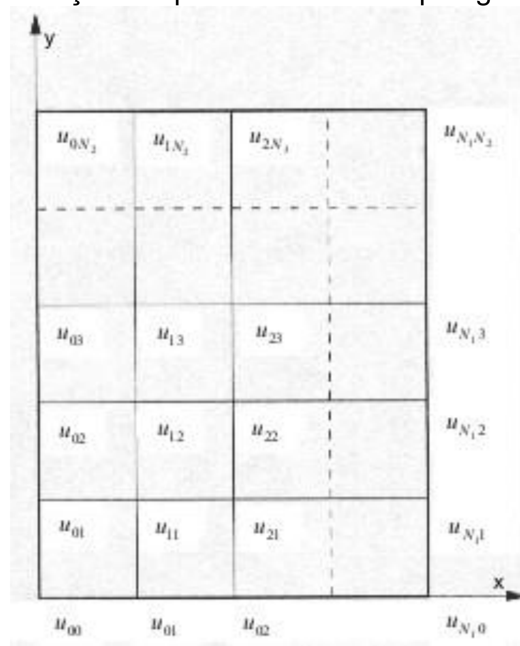


Se obţine următorul sistem de ecuaţii lineare:

$$\begin{cases} u_{20} + u_{11} - 4u_{21} + u_{31} + u_{22} = 0 \\ u_{30} + u_{21} - 4u_{31} + u_{41} + u_{32} = 0 \\ u_{11} + u_{02} - 4u_{12} + u_{22} + u_{13} = 0 \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} + u_{32} + u_{23} = 0 \\ u_{31} + u_{22} - 4u_{32} + u_{42} + u_{33} = 0 \end{cases}$$

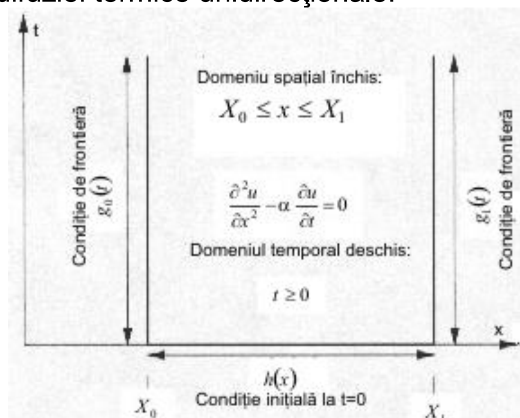
care poate fi rezolvat prin metode matriciale.

În cazul general de diferenţe finite pe un domeniu dreptunghiular:



2.2.2 Ecuaţii diferenţiale pentru probleme de propagare

Considerăm ecuaţia difuziei termice unidirecţionale:



unde α reprezintă difusivitatea termică.

Formularea explicită	Formularea implicită
Expresia în care valoarea necunoscutei este dată explicit în funcţie de valorile cunoscute.	Expresia în care pentru calculul valorilor necunoscute este necesar rezolvarea simultană a unui set de ecuaţi2.
Valori necunoscute $t_0 + \Delta t$ Valori cunoscute t_0 $x_0 - \Delta x$ x_0 $x_0 + \Delta x$	Valori necunoscute $t_0 + \Delta t$ Valori cunoscute t_0 $x_0 - \Delta x$ x_0 $x_0 + \Delta x$
Această metodă explicită este stabilă numai dacă: $$0 \le \frac{\Delta t}{\alpha(\Delta x)^2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t \le \frac{\alpha(\Delta x)^2}{2}$$ Dacă: $\frac{\Delta t}{\alpha(\Delta x)^2} \ge \frac{1}{2}$ soluţia este oscilatorie cu amplitudine ce creşte exponenţial în timp (din analiza stabilităţii lui Neumann).	Această metodă nu induce erori datorate alegerii incrementului de timp fără restricţii relaţionale cu incrementul spaţial.

CAPITOLUL 3
CALACULUL CU ELEMENTE FINITE

3.1 *Analiza ecuaţiilor prin metoda elementului finit*
3.1.1 Tipuri de probleme

Sub aspectul continuităţii:

Statice	Dinamice
• Deşi pot fi dependente de timp, efectele inerţiale sunt ignorate sau pot fi neglijate; • Ele pot fi strict statice sau numai cvasistatice, iar timpul nu trebuie considerat în mod explicit.	• dependenţa de timp este considerată în mod explicit, deoarece efectele inerţiale implică derivate în timp.

Problemele statice se pot clasifica în:

Lineare	Nelineare
• Aliura răspunsului este de tip linear, în sensul principilului cauză şi efect.	• Probleme care nu respectă condiţia de linearitate.

3.1.2 Aplicabilitatea generală a metodei

Metoda a fost utilizată pe larg în domeniul structurilor mecanice, însă poate fi utilizată cu succes în multe alte domenii inginereşti, precum conducţia termică, curgerea fluidelor, în analiza câmpurilor electrice şi magnetice ş.a. Generalizarea aplicabilităţii metodei elementului finit în problemele inginereşti poate fi remarcată din similitudinea care există între diferitele tipuri de probleme inginereşti, ca de exemplu, pentru cazul tratării unidimensionale a fenomenelor fizice:

Transferul termic	Curgerea unui fluid	Efortul mecanic axial
A - aria secţiunii transversale; q_x; q_{x+dx}; x; dx Ecuaţia generală a căldurii dată de Fourier este de forma: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q}A = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ Dacă sistemul nu dispune de generare internă de căldură $\dot{q} = 0$ şi dacă sistemul este în stare de echilibru termic staţionar: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$	u; x; A(x) aria sectiunii transversale Pornind de la ecuaţia bilanţului unei curgeri staţionare cu o viteză: $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ $\rho A u = constant$ rezultă că: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho A u) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$	P; x; A(x) aria sectiunii transversale Într-o bară solidă forţa aplicată, în funcţie de deplasarea axială u şi de modulul lui Young: $P = AE\frac{\partial u}{\partial x}$ Dacă: $P = constant$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

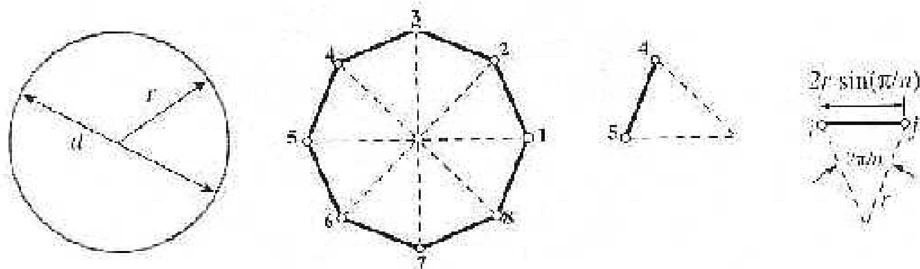
Prin compararea celor trei ecuaţii, rezultă că o procedură de calcul aplicată uneia dintre ele este identică şi pentru celelalte.

3.1.3 Metode de discretizare

Un model matematic continuu poate fi discretizat spaţial, respectiv de trecere la un model discret cu un număr finit de grade de libertate, prin următoarele metode:

- Element finit (dominante în probleme lineare şi neutilizată în probleme nelineare)
- Element de margine sau de frontieră
- Diferenţă finită (metodă abandonată în cazul solidelor, dar rămâne în cazul mecanicii fluidelor)
- Volum finit (dedicată legilor de conservare şi în probleme din mecanica fluidelor)

Conceptul de element finit este parţial explicat printr-o procedură istorică utilizată de Arhimede, respectiv de determinare a perimetrului unui cerc L, de diametru d. Cercul văzut ca un obiect matematic sursă este înlocuit printr-un poligon, respectiv se realizează o aproximare discretă a cercului



Problema lui Arhimede pentru calculul lungimii unui cerc

Înscriind în cerc un poligon regulat cu n laturi şi definind intersecţia laturilor polinomului cu cercul ca noduri iar laturile polinomului ca elemente, atunci un element generic generalizat i-j (dezasamblat, conţinând un element şi două noduri de discontinuitate) are lungimea de:

$$L_{ij} = 2r\, sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

respectiv, determinare independentă de celalte elemente, numit suport local al metodei elementului finit. Deoarece elementele au aceiaşi lungime:

$$L_n = nL_{ij} \Rightarrow \pi_n = \frac{L_n}{d} = n\, sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

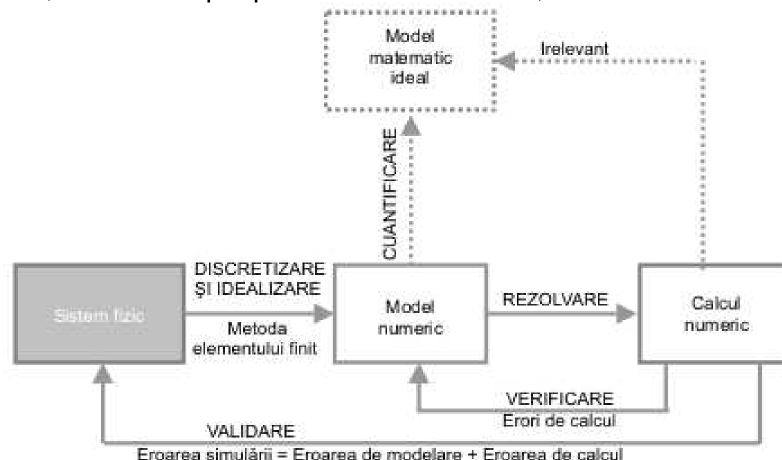
n	π_n
1	0,000000000000000
2	2,000000000000000
4	2,828427124746190
8	3,061467458920718
16	3,121445152258052
32	3,136548490545939
64	3,140331156954753
128	3,141277250932773
256	3,1415138011144301

$$\pi = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

3.1.4 Metoda elementului finit sub aspect fizic

Procedeele de orice natură, care utilizează metoda elementului finit implică realizarea unei succesiuni de paş3. Acestă succesiune de paşi are două configuraţii, în funcţie de mediul în care este utilizată metoda elementului finit şi de principalele obiective.

Principala utilizare naturală a metodei elementului finit este aceea de simulare a unui sistem fizic, fapt ce impune realizarea unui model, de unde şi denumirea de simulare pe bază de model. Un sistem fizic reprezintă sursa simulării unui proces, în timp ce un model matematic ce se impune creat este în general nerelevant. Discretizarea cu ajutorul metodei elementului finit se poate realiza şi ajusta, în mod simplu pe baza măsurătorilor, fără a face uz de modelul matematic.

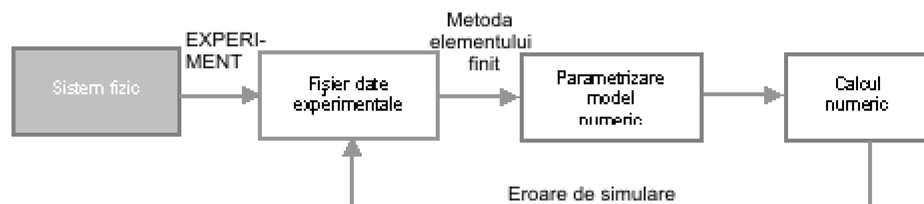


Modelarea şi simularea fizică prin metoda elementului finit

Conceptul de eroare se impune în metoda elementului finit prin două căi:

De verificare	De validare
- Reprezintă eroarea de rezolvare prin metode numerice a modelului discret şi nu este în general importantă; - Această eroare este generată de înlocuirea modelului real cu un model matematic ideal, utilizând metode de discretizare; - Chiar dacă ar exista modele matematice, în cele mai relevante probleme fizice se apelează la modele discrete.	- Compară soluţia numerică prin calculul erorii de simulare care combină erorile de modelare şi de calcul; - Deoarece eroarea de calcul este în general nesemnificativă, eroarea de simulare poate fi identificată cu eroarea de modelare.

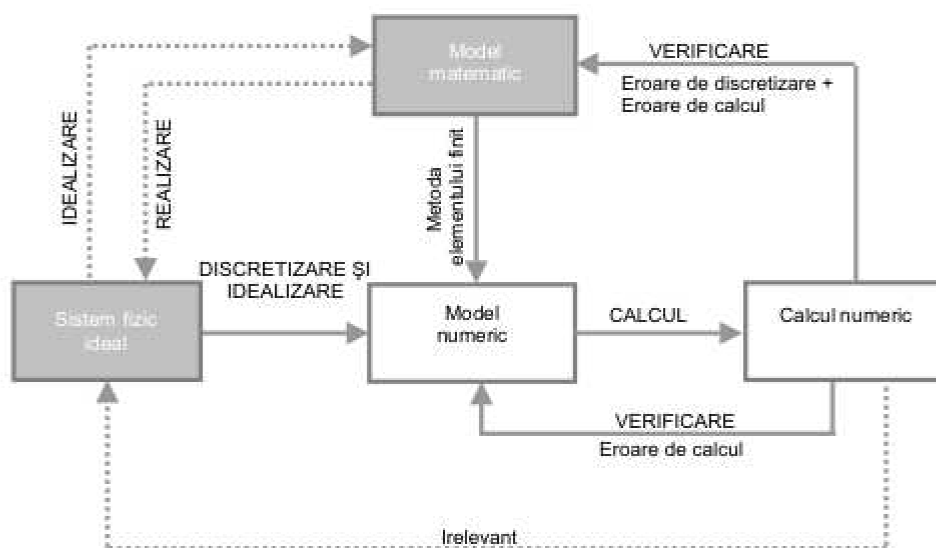
O modalitate de a ajusta modelul numeric, în aşa fel încât să corespundă cât mai bine modelului fizic real, poartă denumirea de model reactualizat. În măsura în care condiţiile de minimizare sunt în general nelineare, chiar şi în cazul în care modelul este linear, reactualizarea procesului se realizează în mod inerent prin proceduri iterative.



Model reactualizat prin date experimentale

3.1.5 Metoda elementului finit sub aspect matematic

O cale naturală de utilizare a metodei elementului finit se axează pe matematică, urmând următorii paşi:



Modelarea şi simularea matematică prin metoda elementului finit

Modelul matematic este în general o ecuaţie diferenţială ordinară sau parţială, variabile în spaţiu şi timp. Discretizarea (fără nici o legătură cu fizica), reprezintă modelul discret cu elemente finite generat dintr-o formă variţională sau nu a modelului matematic. Ecuaţiile cu diferenţe finite sunt procesate prin proceduri care returnează o soluţie numerică. Sistemul fizic ideal poate fi prezentat ca o realizare a modelului matematic, modelul matematic fiind văzut ca o idealizare a acestui sistem.

Conceptul de eroare de rezolvare reprezintă cantitatea cu care soluţia numerică satisface ecuaţia numerică şi este relativ neimportantădacă este utilizat calculatorul. Eroarea de discretizare reprezintă cantitatea cu care soluţia numerică satisface modelul matematic.

Metoda elementului finit fizic şi matematic nu reprezintă secvenţe esclusiviste ci complementare.Această sinergie reprezintă una dintre cauzele puterii şi aceptanţei metode3. Existând două căi de complementaritate a utilizării metodei elementului finit există şi două

interpretări complementare; una legată de semnificaţia fizică şi cealaltă focalizată pe contextul matematic.

3.1.6 Interpretarea metodei elementului finit

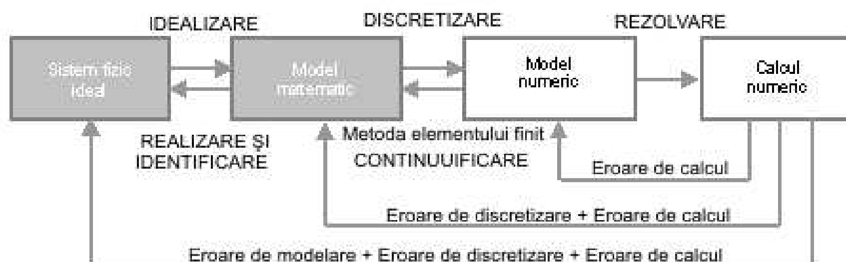
Interpretarea fizică	Interpretarea matematică
• Conceptul de bază este de *breakdown*(dezasamblare, distrugere, partiţie, separare, descompunere) a unui sistem complex într-unul mai simplu compus din elemente finite (piese primare), caracterizate printr-un număr finit de grade de libertate; • Gradele de libertate reprezintă valori necunoscute ale funcţiei într-un set de puncte nodale; • Sistemul original este aproximat de un model discret construit prin conectarea sau asamblarea tuturor elementelor; • Procesul de discretizare constă în împărţirea sistemului în subsisteme. Dacă şi subsistemul este complex atunci şi acesta va fi supus divizării	• Metoda elementului finit este văzută ca o procedură de obţinere a unei aproximări numerice a soluţiei problemelor cu condiţii de frontieră asupra unui domeniu; • Domeniul este înlocuit dintr-un ansamblu de subdomenii numite elemente finite. Prin asamblarea geometrică a subdomeniilor se obţine doar o formă aproximativă a domeniului; • Funcţia necunoscută este aproximată local pe fiecare element printr-o procedură de interpolare funcţie de valorile atribuite funcţiei şi dacă este posibil şi a derivatelor ei, pentru un set de puncte nodale, amplasate în general pe marginea elementului.

3.2 *Introducerea în modelarea prin metoda elementului finit*

3.2.1 Idealizare

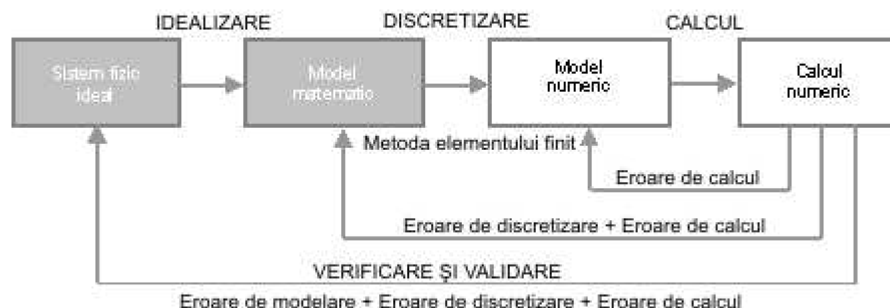
Prin idealizare se trece de la sistemul fizic la modelul matematic. Acesta reprezintă pasul cel mai important în practica inginerească, respectiv de cel ce trebuie să o efectueze.

Cuvântul model are ca o primă definire copia sau reprezentarea unui obiect. El reprezintă un dispozitiv simbolic creat pentru a simula şi a anticipa aspecte comportamentale previzibile într-un sistem.Trebuie făcută distincţia între comportare şi aspecte comportamentale.



Simularea unui proces prin metoda elementului finit

Modelarea matematică sau idealizarea reprezintă un proces cu care inginerul sau cercetătorul trece de la un sistem fizic real la un model matematic a sistemului. Procesul este numit idealizare deoarece modelul matematic necesită o abstractizare a realităţii fizice (necesară reducerii controlabile a complexităţii). Rezultatele procesate numeric sau analitic pe modelul matematic sunt reinterpretate fizic numai sub aspectul de comportabilitate. Pentru simulare se impune reducerea complexităţ proporţei de manevrabilitate. Acest deziderat se obţine prin fitrarea detaliilor fizice ce nu sunt relevante în analiza procesului.



Simularea bazată pe model

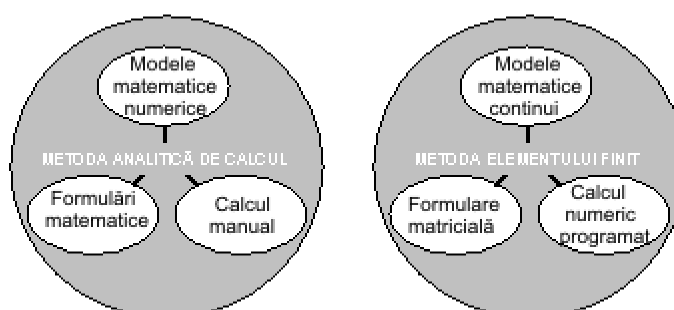
Un scenariu obişnuit industrial este acela că un inginer trebuie să analizeze o structură sau substructură şi pentru care el dispune doar de o cutie neagră, care reprezintă un program cu elemente finite. Acest program oferă un catalog cu elemente finite tip, dar din momentul în care se acceptă un element specific din catalog se impune alegerea automată şi a modelului matematic pe care se bazează elementul ales. Această alegere este denumită modelare implicită. În cazul în care modelul matematic este impus pentru un model fizic modalitatea de modelare se denumeşte explicită. Această ultimă metodă implică însă multă expertiză tehnică, resurse, experienţă tehnică şi profesionalism.

În mod practic este utilizată o metodă care combină modelarea explicită cu cea implicită, prin utilizarea unor subprograme, unele destinate modelării fizice iar celelalte simulării fizice.

Cuvântul model constituie un dispozitiv simbolic construit pentru a simula şi a anticipa aspecte de aşteptat a unui sistem.

3.2.2 Discretizare

Modelarea matematică reprezintă un pas către simplificare cu toate că sistemele fizice nu sunt în mod necesar uşor de rezolvat. Adesea ele implică ecuaţii diferenţiale variabile spaţial şi temporal şi care sunt supuse unor condiţii de frontieră sau de interfaţă. Astfel de modele prezintă o infinitate de grade de libertate. Există două modalităţi de rezolvare, fie pe cale analitică, fie pe cale numerică:



Compataţie între metodele analitice şi cele numerice

Rezolvarea prin metode analitice (soluţii în formă precisă)	Rezolvarea prin metode numerice (metoda elementului finit)
• Satisfac mai mult intelectual • Din nefericire, acestea sunt aplicabile pentru forme geometrice marginale simple şi regulate • Sub aspect ingineresc, fie nu se pretează unui calcul analitic, fie sunt prea istovitoare de rezolvat	• Pentru a realiza practic simuarea numerică este necesar de a reduce numărul gradelor de libertate la un număr finit prin metoda de discretizare, respectiv de a genera un model discret • Pentru sisteme inginereşti complexe se impune o descompunere multinivel • Discretizarea se poate realiza atât spaţial cât şi temporal

În practica inginerească erorile de modelare pot fi cele mai însemnate, dar sunt greu de evaluat deoarece validarea modelului impune acces şi comparaţie cu date experimentale.

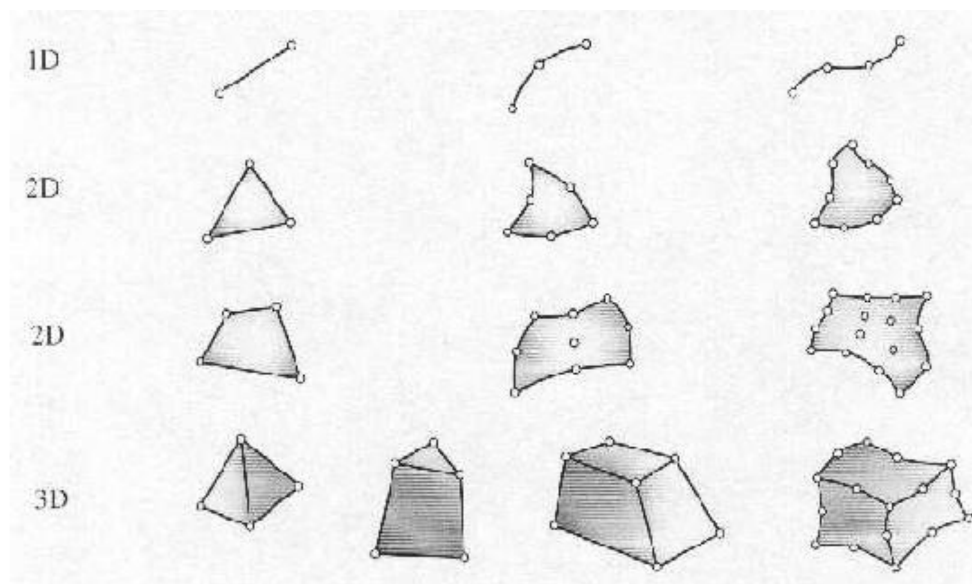
O altă sursă de eroare importantă este eroarea de discretizare. Chiar dacă se ignoră erorile de rezolvare soluţia calculată pe baza modelului discret reprezintă doar o aproximare faţă de soluţia exactă a modelului matematic. Măsura acestei abateri se numeşte eroare de discretizare. Caracterizarea şi studierea acesei erori ţine de teoria aproximării din analiza numerică (cerinţele de convergenţă a soluţiei numerice).

În mod intuitiv se poate postula că o precizie mai ridicată a soluţiei obţinute pe modelul discret se poate obţine prin creşterea gradelor de libertate, respectiv că eroarea de discretizare va tinde către zero atunci când numărul gradelor de libertate va tinde către infinit.

3.2.3 Atributele elementelor finite

Propietăţile locale pot fi identificate considerându-le în sisteme individuale şi izolate, prin paşi de deconectare şi localizare, respectiv separarea elementului de nodurile din vecinătatea lui şi amplasarea lui într-un sistem de coordonate local convenţional.

După efectuarea acestor doi paşi vor rezulta elemente generice, precum cele ilustrate în figura de mai jos:



Alocarea nodurilor pe un element definit

Datele asociate unui element finit individual sunt:

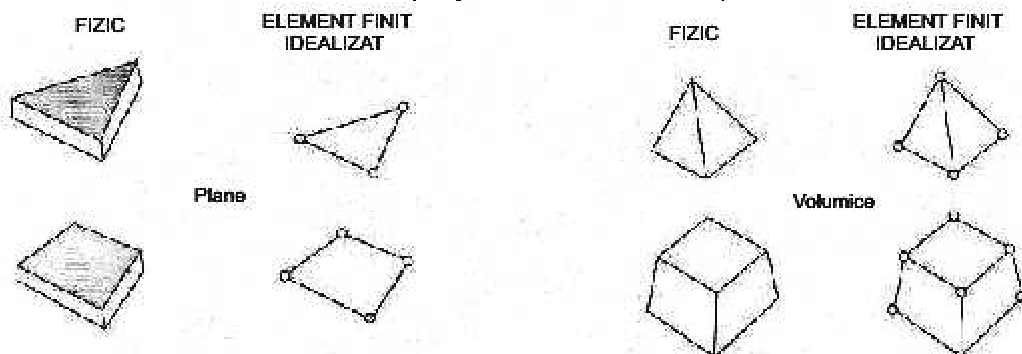
Dimensionalitate intrinsecă	Elementele pot avea 1, 2 sau 3 dimensiuni, sau chiar cu dimensionalitate nulă (punct masic)
Puncte nodale	Fiecare element are un set de puncte nodale (noduri), care servesc definirii elementului geometric şi a gradelor de libertate. Acestea sunt amplasate deobicei în colţuri şi la capetele elementului, dar şi pe feţele şi în interiorul elementului.
Geometrie	Definită prin amplasarea punctelor nodale.
Grade de libertate	Specifică starea elementului şi posibilitatea de conectare cu elementele adiacente. Ele sunt definite ca valori sau derivate ale variabilei de câmp primare în punctele nodale şi arată modul în care variabila primară este evidenţiat în modelul matematic.
Forţe nodale	Acestea sunt în corespondenţă cu gradele de libertate, de exemplu pe bază de bilanţ energetic.
Propietăţi constitutive	Specifică natura şi propietăţile materialului.

COMPONENTĂ FIZICĂ DE STRUCTURĂ
DENUMIRE MODEL MATEMATIC
ELEMENT FINIT DE DISCRETIZARE
Bară
Traversă
Tub, ţeavă
Lonjeron
Panou marginal

Elemente primare de structură

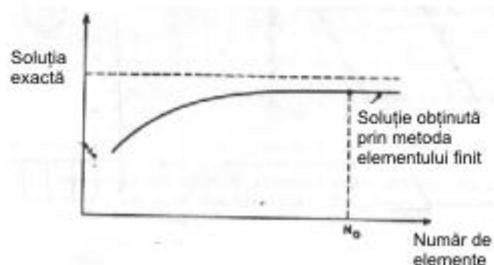
Calificativul de primitiv se utilizează pentru a distinge macroelementele. Primitivele nu sunt desasamblabile în elemente mai simple.

Elementele continui rezultă din împărţirea structurilor componente văzute ca un continuu.



Elemente continui

Numărul de elemente ce pot fi idealizate depinde de precizia de modelare dorită, de dimensiunea elementului şi de numărul gradelor de libertate implicate. În general, prin creşterea numărului de elementeprecizia de calcul va creşte. Totuşi, peste un anumit număr de elemente precizia nu mai suferă îmbunătăţiri semnificative.



3.3 *Elemente de algebra matricială*

3.3.1 Noţiuni introductive

Matricile exprimă relaţiile algebrice lineare în formă compactă, fapt ce uşurează vizualizarea şi înâelegerea esenţei. Fie următorul sistem de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = y_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1j}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2j}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_{i1} & a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots \quad a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mj}\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_j \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_i \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix}$$

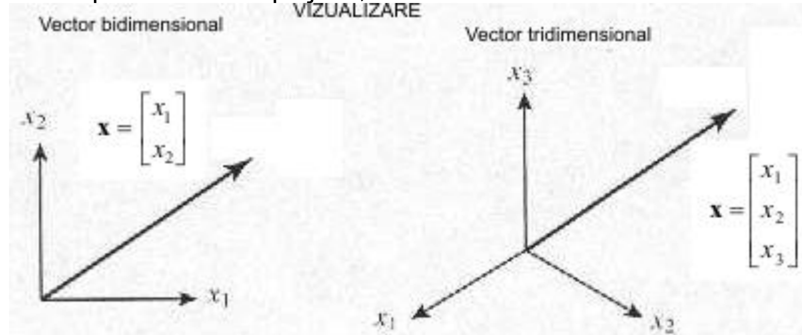
$$\Leftrightarrow [\mathbf{A}][\mathbf{x}] = [\mathbf{y}]$$

3.3.2 Vector

Prin definiţie, un set de n numere ce pot fi scrise în forma:

Vector coloană	Vector rând
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$	$\mathbf{z} = [z_1 \ \ z_2 \ ......z_n]$
Transpusa unui vector coloană într-un vector rând cu aceleaşi elemente componente este: $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \ x_3 \ \ ... \ \ x_n] \Rightarrow (\mathbf{x}^T)^T = \mathbf{x}$ Doi vectori, coloană sau rând, **x** şi **y** sunt egali dacă şi numai dacă toate componentele lor sunt egale, respectiv x_i=y_i, pentru i=1,2,...n. Vectorii de ordine de mărime diferite nu pot fi comparaţi prin egalitate sau inegalitate.	

Vizualizarea în reprezentarea spaţială, în sistem de coordonate cartezian este:



Vectorii au următoarele proprietăţi:

Adunarea şi scăderea $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{x} + \mathbf{y} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ .... \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$
Înmulţire cu un scalar (scalarea unui vector)	$c\,\mathbf{x} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ ..... \\ cx_n \end{bmatrix}$ Dacăc=0 rezultă un vector nul. Dacă c<0 sensul vectorului se inversează
Produsul scalar a doi vectori	$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \overset{sc}{=} x_i y_i$
Norma Euclidiană	$\lVert\mathbf{x}\rVert \overset{def}{=} (\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \overset{sc}{=} x_i x_i \Rightarrow \lvert x \rvert \overset{def}{=} +\sqrt{\lVert\mathbf{x}\rVert}$
Comutativitate	**x**+**y**=**y**+**x** (**x**,**y**)=(**y**,**x**)
Asociativitate	**x**+(**y**+**z**)=**y**+(**x**+**z**)
Împărţirea cu un scalar	$\frac{\mathbf{x}}{c} \equiv \frac{\mathbf{x}}{c} \overset{def}{=} \left(\frac{1}{c \neq 0}\right)\mathbf{x}$
Vector nul	$\mathbf{o} = [0 \ \ 0 \ ....0]$
Vector unitate	$\mathbf{e_j} = [0 \ \ 0 \ ....1...0]$
Vector unitar	$\mathbf{e} = [1\,1 \ ....1]$

Inegalităţi importante	$\lvert(\mathbf{x},\mathbf{y})\rvert \le \lvert\mathbf{x}\rvert\lvert\mathbf{y}\rvert$ $\lvert\mathbf{x}+\mathbf{y}\rvert \le \lvert\mathbf{x}\rvert+\lvert\mathbf{y}\rvert$
Normalizare la unitatea de lungime	$\frac{\mathbf{x}}{\lvert\mathbf{x}\rvert} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\lvert\mathbf{x}\rvert} \\ \frac{x_2}{\lvert\mathbf{x}\rvert} \\ \dots \\ \frac{x_n}{\lvert\mathbf{x}\rvert} \end{bmatrix}$
Vector ortogonal	$cos\theta = (\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

3.3.3 Matricea

Un set de mărimi scalare, a_{ij} numite componente,aranjate într-un tablou dreptunghiular, cu *m* rânduri şi *n* coloane, poartă denumirea de matrice dreptunghiulară de ordinul *m* x *n*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \ \ a_{12}\dots a_{1j}\dots \ a_{1n} \\ a_{21} \ \ a_{22}\dots a_{2j}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \ \ a_{i2}\dots a_{ij}\dots \ \ a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \ \ a_{m2}\dots a_{mj}\dots a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

Transpusa (inversa) unei matrici este:

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}] \Rightarrow (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

În cazul în care *m* = *n* matricea se numeşte patratică de ordinul n. Matricea inversă a unei matrice patratice este definită $\mathbf{A}^{-1}$ şi este dată prin relaţia:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Cea mai importantă aplicaţie a matricii inverse este rezolvarea unui sistem de ecuaţii lineare în următorii paşi:

$$Presupunem:$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \ \Big|\mathbf{A^{-1}} \ \Rightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

Principalele propietăţi a matricilor sunt:

<table>
<tr><td>Simetrie şi nesimetrie</td><td><table><tr><td>Simetric (diagonală)</td><td>Asimetric</td></tr><tr><td>Elementele din afara diagonalei sunt simetrice.</td><td>Toate elementele de pe diagonală sunt nule.</td></tr><tr><td>$a_{ij} = a_{ji}$</td><td>$a_{ij} = -a_{ji}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Matrice nulă</td><td>$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 \ \ 0\dots0\dots \ 0 \\ 0 \ \ 0\dots0\dots \ 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \ \ 0\dots0\dots \ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \ \ 0\dots0\dots \ 0 \end{bmatrix}$</td></tr>
</table>

Matrice diagonală	$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} a_{11}\ 0...0....\ 0 \\ 0\ \ a_{22}...0...\ 0 \\ .... \\ 0\ \ 0...a_{II}....\ 0 \\ .... \\ 0\ \ 0...0...\ ..a_{nn} \end{bmatrix}(nxn) \Leftrightarrow D = diag[a_{11}\ a_{22}\ ..a_{ii}\ ..a_{nn}]$
Matrice triunghiulară	Supradiagonală: $\mathbf{U}=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}..a_{1i}...\ a_{1n} \\ 0\ \ a_{22}.....a_{2i}...\ a_{2n} \\ .... \\ 0\ \ 0.........a_{ii}....a_{in} \\ .... \\ 0\ \ 0...0...........a_{nn} \end{bmatrix}$ Subdiagonală: $\mathbf{L}=\begin{bmatrix} a_{11}\ 0...0..........\ 0 \\ a_{21}\ \ a_{22}...0.......\ 0 \\ .... \\ a_{i1}\ \ a_{i2}..a_{ii}.......\ 0 \\ .... \\ a_{n1}\ \ a_{n2}..a_{in}...\ ..a_{nn} \end{bmatrix}$
Matrici egale	$\mathbf{A}=\mathbf{B} \Rightarrow a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,..m,\ j=1,2,..n)$
Adunarea şi scăderea	$\mathbf{A}+\mathbf{B}\overset{def}{=}[a_{ij}+b_{ij}]$ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}\ si\ \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
Înmulţirea cu un scalar	$c\mathbf{A}\overset{def}{=}[ca_{ij}]$
Înmulţirea unei matrici cu un vector	$\mathbf{y}=\mathbf{Ax}\ unde\ \mathbf{A}=[a_{ij}](mxn), \mathbf{x}=\{x_j\}(n) \Rightarrow \mathbf{y}=\{y_i\}(m)$ $y_i \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \overset{sc}{=} a_{ij}x_j,\ i=1,2,..m$
Înmulţirea a două matrici	$\mathbf{C}=\mathbf{AB}\,unde\,\mathbf{A}=[a_{ij}](mxn), \mathbf{B}=[b_{jk}](nxp)\ si\ \mathbf{C}=[c_{ik}](mxp) \Rightarrow$ $c_{ik} \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \overset{sc}{=} a_{ij}b_{jk}, i=1,2,..m\ k=1,2,..p$ $\begin{bmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ .... \\ a_{i1}\rightarrow a_{in} \\ .... \\ a_{m1}...a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}..b_{1k}..b_{1p} \\ ....\downarrow ...... \\ b_{n1}..b_{nk}..b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ ....c_{ik}.......... \\ \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC} \Rightarrow (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$ $(\mathbf{AB}...\mathbf{N})^T=\mathbf{N}^T...\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
Ridicarea la putere a unei matrici	$\mathbf{A}^m=\mathbf{AAA}......\mathbf{A}$

Principalele propietăţi ale matricii inverse sunt:

Inversa matricii transpuse este egală cu transpusa inversei	$(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$
Inversa matricii simetrice este simetrică	$(\mathbf{A}^T)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$
Inversa matricii produs	$(\mathbf{BA})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

3.3.4 Determinant

Determinantul unei matrici patratice reprezintă un număr definit astfel:

$$det|A| = \pm\Pi\ a_{1j_1}, a_{2,j_2}, ...a_{n,j_n}\ \ unde \begin{cases} +\ daca\ permutarea(j_1 j_2 ... j_n)\ este\ para \\ -\ daca\ permutarea(j_1 j_2 ... j_n)\ este\ impara \end{cases}$$

Determinanţii au următoarele proprietăţi princippale:

Interschimbabilitatea rândurilor şi coloanelor	$\lvert\mathbf{A}\rvert = \lvert\mathbf{A}^T\rvert$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$
Matrice singulară	$\lvert\mathbf{A}\rvert = 0 \; unde \, \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_n$
Matrice nesingulară	$\lvert\mathbf{A}\rvert \neq 0$
Matrici normae	$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$
Matrici ortogonale	$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$

Formula generală pentru determinarea elementelor unei matrici inverse este:

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\lvert\mathbf{A}\rvert}$$

unde conjugatul A_{ji} este definit ca submatricea de ordinul (n-1)x(n-1) care se obţine prin eliminarea rândului j şi al coloanei i din matricea A şi înmulţit cu $(-1)^{i+j}$.

3.3.5 Valori şi vectori proprii

Considerăm forma specială a sistemului linear prezentat anterior, unde vectorul y este înlocuit prin vectorul soluţie x:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = \lambda x_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lvert A - \lambda I\rvert = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \quad a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha^n = 0$$

Acestor valori proprii λ_i le sunt asociaţi vectori proprii x_i care satisfac relaţia:

$$\mathbf{Ax_i} = \lambda_i\mathbf{x_i}$$

CAPITOLUL 4

4.1 MathCAD Prezentare generală

Sistemul informatic (aplicaţia) MathCAD este un produs al companiei MathSoft, specializat în rezolvarea problemelor de matematică, fie numeric, fie simbolic. Versiunile MathCAD Professional ≥2000 sau MathCAD 11 Entreprise necesită aceleaşi cerinţe hard ca şi Windows 2000 sau Windows XP . *Lansarea* în execuţie *şi părăsirea* aplicaţiei MathCAD se fac ca şi pentru orice componentă MS Office.

Descrierea ferestrei principale

Fereastra principală are aceeaşi structură ca şi cea a componentelor MS Office. Linia a doua, *meniul principal* al aplicaţiei conţine următoarele submeniuri:



Sub-meniul File conţine comenzile:

New – pentru a începe un nou document de tip MathCAD. Extensia unui document MathCAD este *.mcd* ;

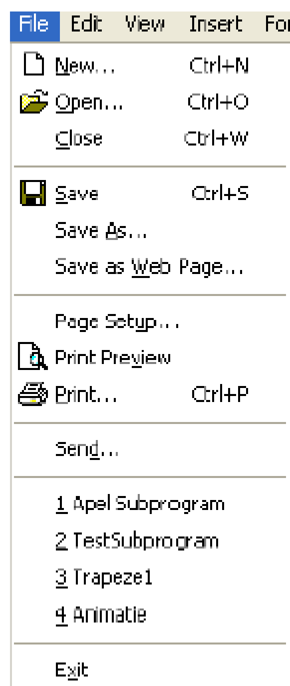
Open – pentru deschiderea unui document MathCAD deja existent; **Close** – pentru închiderea documentului curent;

Save – pentru salvarea documentului curent;

Save as – pentru salvarea cu un alt nume a documentului curent; **Page setup** – pentru stabilirea dimensiunilor hârtiei la imprimantă;

Print preview – pentru vizualizarea documentului înainte de a fi imprimat;

Print – pentru imprimarea documentului curent.

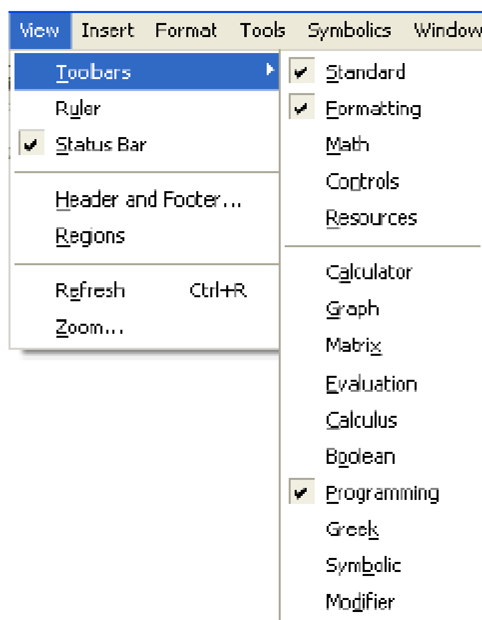


Sub-meniul Edit conţine comenzile referitoare la editarea de documente. Câteva dintre comenzile de editare:



Undo – pentru renunţarea la ultima acţiune de editare a documentului curent;
Redo – are efect invers comenzii Undo;
Cut – pentru decuparea zonei selectate din document;
Copy – pentru a trece în Cliboard zona selectată;
Paste – pentru a plasa conţinutul din Clipboard în locul precizat;
Paste Special – pentru a plasa obiecte şi imagini, care se găsesc în Cliboard, în locul precizat;
Delete – pentru a şterge zona selectată;
Select All – pentru a selecta documentul întreg;
Find – pentru a găsi un cuvânt în documentul curent. Cursorul se poziţionează pe cuvânt dacă acesta există;
Replace – pentru găsirea unui cuvânt şi înlocuirea acestuia printr-un altul;
Go to page – pentru a plasa cursorul la începutul paginii indicate;
Check speling – pentru lansarea modulului care controlează sintactica şi gramatica documentului.

Sub-meniul View conţine următoarele comenzi privind apectul ecranului :

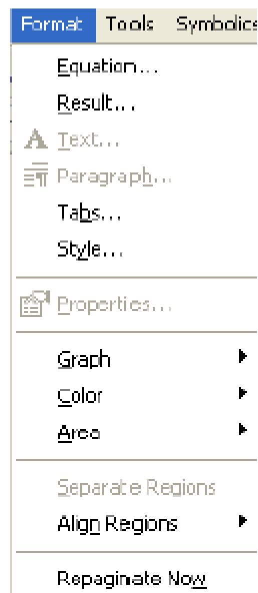


Tools bar – bara de instrumente, conţinând tipurile:
Standard – include butoanele corespunzând celor mai utilizate comenzi ale sub-meniurilor *File*, *Edit*. Ea se plasează sub bara de meniu principală ;
Formating – are butoane pentru stabilirea tipurilor şi dimensiunii caracterelor, poziţia şi indentarea textului ;
Math – conţine butoane corespunzând barelor instrumentelor (palete) pentru : calcule aritmetice (*Calculator*), evaluări de expresii aritmetice (*Evaluation*) şi logice (*Boolean*), reprezentări grafice de funcţii (*Graph*), definirea vectorilor şi matricelor şi calcul matriceal (*Matrix*), calcul de sume, integrale, derivate, limite (*Calculus*), comenzi pentru scrierea programelor MathCAD (*Programming*), caractere ale alfabetului grecesc (*Greek*), calcul simbolic (*Symbolic*) .
Status bar – bara de stare a documentului curent. Ea se plasează la baza ecranului;
Header and Footer permite inserarea numărului de pagină într-un document fie în

antetul paginii, fie în subsol;
Regions – pentru identificarea zonelor documentului (de text şi conţinând expresii matematice, programe etc);
Zoom – pentru stabilirea dimensiunii caracterelor în vederea afişării pe ecran;
Refrech – pentru refacerea imaginii afişate pe ecran.

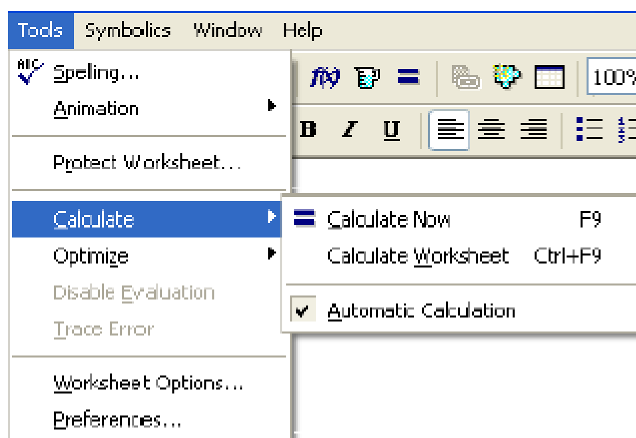


Sub-meniul Insert are comenzi pentru inserarea în document a graficelor, matricelor, funcţiilor, imaginilor, pentru stabilirea unităţilor de măsură etc. Câteva comenzii ale acestui sub-meniu : **Graph –** MathCAD permite repezentarea grafică a funcţiilor în două sau trei dimensiuni sub forme diferinte ;
Matrix – pentru stabilirea dimensiunilor unui tablou (vector sau matrice) ;
Function – permite inserarea funcţiilor care se găsesc în biblioteca aplicaţiei ;
Unit – MathCAD, având possibilitatea de a rezolva probleme de fizică, mecanică etc, are nevoie de unităţi de măsură în care sunt exprimate datele ;
Picture – pemite inserarea unei imagini în documentul MathCAD ; **Area** – pentru separarea documentului în zone distincte ;
Math/Text Region – pentru delimitarea zonelor documentului în care sunt formule matematice şi programe pe de o parte de zonele de text (comentarii) pe de altă parte.

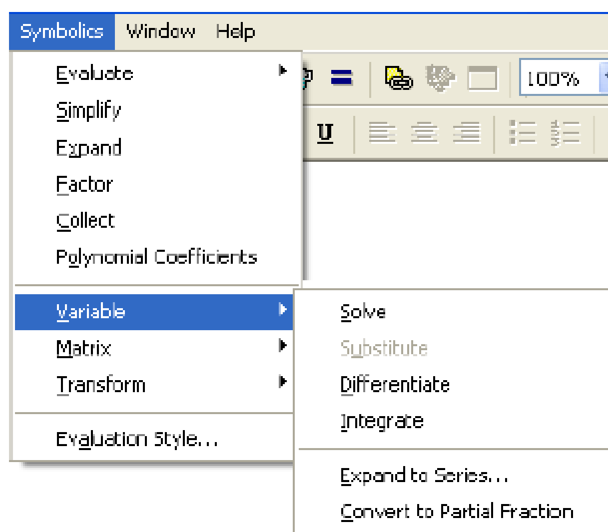


Sub-meniul Format are comenzi pentru aranjarea aspectui documentului. De exemplu :
Equation – pentru stabilirea tipurilor de caractere pentru variable şi constante incluse într-o ecuaţie;
Result – pentru precizarea formei rezultatelor (numărul de cifre zecimale, simbolul pentru numărul complex $\sqrt{-1}$ etc);
Text – permite stabilirea tipului şi dimensiunii caracterelor unui text ;
Paragraph – pentru indentarea textului ;
Style – pentru editarea documentului împărţit în secţiuni, capitole, sub-capitole etc ;
Color – permite stabilirea culorii fondului documentului ;
Separate Regions – pentru delimitarea (fără linii) a regiunilor documentului ;
Headers/Footers – pentru inserarea antetului şi sub-solului în document ;
Repaginate Now – pentru numerotarea

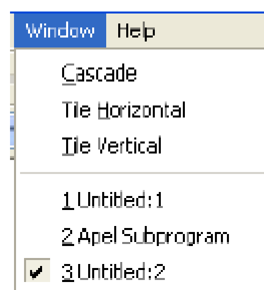
paginilor documentului.
Sub-meniul Tools conţine comenzii pentru lasarea calculelor (fie numerice, fie simbolice). De exemplu :
Calculate – determină execuţia calcu-lelor pentru zona unde se găseşte cursorul ;
Calculate Worksheet – execută calcu-lele cuprinse în documentul curant ;
Automatic Calculation – execută automat calculele de fiecare dată când o formulă este scisă;
Options – permite stabilirea valorii iniţiale pentru indicele vecunităţi de măsură, tipul de entităţi;
torilor şi matricelor, sistemul de
Animation – pentru realizarea unei animaţii într-o reprezentare grafică a unei funcţii.



Sub-meniul Symbolics are comenzi care permit calcul simbolic (calculul derivatelor, primitivelor, dezvoltări în serie Taylor etc). Câteva comenzi ale acestui sub-meniu :
Simplify – pentru simplificarea expresiilor matematice ;
Factor – pentru scrierea expresiilor ca un produs de factori ireductibili ;
Polinomial Coefficients – pentru deter-minarea vectorului coeficienţilor unui polinom ;
Variable – are la rândul său o listă de opţiuni care devin accesibile dacă se plasează cursorul pe o variabilă, pentru aflarea rădăcinii (*Solve*) unei ecuaţii, pentru calcularea derivatei (*Differentiate*), a primitivei (*Integrate*), pentru dezvoltarea în serie Taylor (*Expand to Series*) etc ;
Matrix – pentru determinarea matricei transpuse (*Transpose*), a matricei inverse (*Inverse*), determinantul unei matrice (*Determinant*) ; **Transform –** pentru determinarea transformatei directe şi a transformatei inverse de tip Fourier, Laplace, Z ;



Sub-meniul Window are comenzi pentru divizarea ferestrei în două
părţi, fie orizontale, fie verticale, pentru aranjarea feres-trelor în cascadă şi are o listă a documentelor deschise în sesiunea curentă



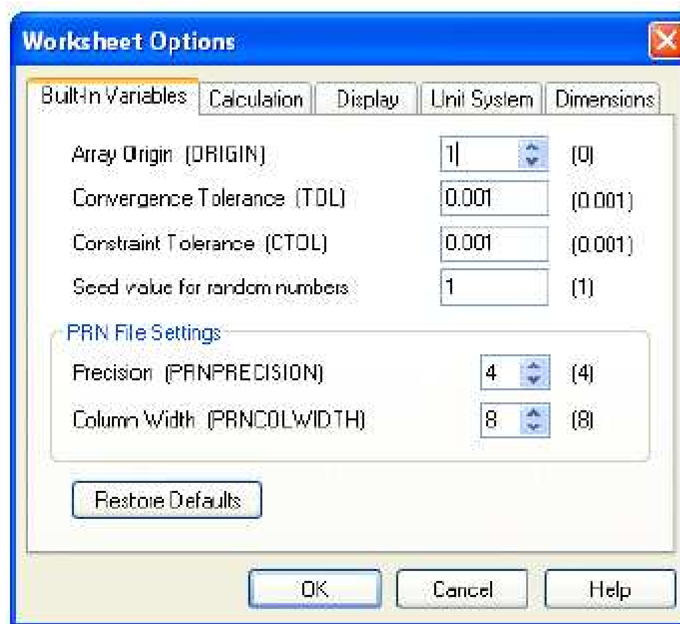
Sub-meniul Help are informaţii asupra acestei aplicaţii şi se pot accesa aceste informaţii fie apăsând tasta F1, fie făcând clic deasupra sub-meniului *Help*.

În zona de editare regiunile pot fi: regiune de calcule (implicită), *Text Region* (comentarii), regiune de grafice. Dacă se suprapun două regiuni, cu *Separate Regions* din sub-meniul *Format,* aceste devin vizibile. Un comentariu se deschide cu semnul ” sau din sub-meniul *Insert* se selectează *Text Region*. Pentru părăsirea unei regiuni de text se face clic în afara acesteia sau se folosesc săgeţile direcţionale.
În MathCAD se face distincţie între literele majuscule şi cele minuscule în zonele de calcul.

Într-un document MathCAD calculele se fac de la stânga spre dreapta de sus în jos!

Numele de variabile (identificatori) se formează cu litere şi/sau cifre prima obligatoriu literă, la care se pot adăuga şi indici cum se arătă mai jos.

Indicii în MathCAD sunt folosiţi pentru:
a) identificarea elementelor unui vector
$v \in R^n$, *vi* desemnând a *i*-a componentă a vectorului *v*, sau unei matrice
$A \in M_{n,m}(R)$, $A_{i,j}$ desemnând elementul de pe linia *i* şi coloana *j* a matricei *A*. Acest indice se obţine fie din paleta *Matrix*, fie cu [
Notă: *Implicit, în MathCAD, indicii încep cu valoarea zero !*
Se poate schimba valoarea iniţială a indicilor utilizând Worksheet Options din sub-meniul Tools, înlocuind zero cu noua valoare în câmpul Array Origin, ca în figura alăturată.
b) identificarea coloanelor unei ma-trice,
$A \in M_{n,m}(R)$, $A^{<i>}$
desemnând coloana a *i*-a a matricei *A*. Indicele de coloană se ia fie din paleta *Matrix,* fie se foloseşte combinaţia de taste Ctrl şi
^ apăsate simultan.
c) identificarea variabilelor (nume de variabile) x_i reprezentând variabila cu acest nume şi nu componenta a *i*-a a unui vector. Acest indice se obţine punând după literă caracterul punct (.) apoi indicele.



Atribuirea în MathCAD se face utilizând simbolul : care devine în documentul MathCAD :=
Afişarea pe ecran se face folosind semnul =
Se pot face calcule vectoriale şi matriceale utilizând MathCAD, fie numerice, fie simbolice.
Tabelul următor prezintă operatorii aritmetici şi tipul operanzilor.

Operaţie	Simbol	Operanzi
Adunare	+	Variabile, constante şi funcţii numerice, vectori şi matrice
Scădere	-	Variabile, constante şi funcţii numerice, vectori şi matrice
Înmulţire	*	Variabile, constante şi funcţii numerice, vectori şi matrice
Împărţire	/	Variabile, constante şi funcţii numerice
Produs vectorial	×	Vectori tridimensionali
Ridicare la putere	^	Variabile, constante şi funcţii numerice

Adunarea, scăderea, produsul vectorilor şi matricelor se realizează foarte simplu scriind operanzii şi operatorii corespunzători.

Exemple.

a) Fie X, $Y \in R^n$, atunci $U = X+Y$, $V = X-Y$.

b) $Z = X*Y$

c) fie $A, B \in M_{m,n}(K)$, K fiind R sau C. $E = A + B$, $D = A-B$.

d) fie $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$, atunci $F = A*B$.

Calcul numeric

Vom prezenta câteva aplicaţii în analiza matematică şi algebra liniară, care au o mare frecvenţă în activităţile curente în inginerie, efectuate fără dificultate în MathCAD.

Aplicaţii în analiza matematică

CAPITOLUL 5

1.1 MATLAB Prezentare Generala

Ce este MATLAB ?

MATLAB® (MATtrix LABoratory) este un pachet de programe de înaltă performanţă, interactiv, destinat calculului matematic, ştiinţific şi ingineresc. MATLAB integrează calcul, programare şi vizualizare, într-un mediu de lucru prietenos, soluţionarea problemelor presupunând folosirea notaţiilor matematice clasice. Utilizarea programului MATLAB include:

- Matematică şi calcul numeric
- Programare şi dezvoltare de algoritmi
- Modelare şi simulare
- Analiză de date, exploatarea rezultatelor şi vizualizare
- Grafică ştiinţifică şi inginerească
- Dezvoltare de aplicaţii software, incluzând construcţie de interfeţe grafice cu utilizatorul (GUI)
- Etc.

MATLAB este un produs al companiei americane The Mathworks, Inc. [http://www.mathworks.com] şi lucrează sub Windows, Unix, LINUX şi Machintosh. MATLAB include toate facilităţile unui limbaj complet de programare, admiţând interfeţe cu limbajul de programare C, C++ şi FORTRAN. Versiunea cea mai recentă a pachetului de programe MATLAB este versiunea 6.

MATLAB a cunoscut o puternică evoluţie în decursul ultimilor ani, reprezentând astăzi în mediile universitare o unealtă standard de calcul, fiind asociată diverselor cursuri introductive sau avansate în matematică, ştiinţă şi inginerie. În industrie, MATLAB este recunoscut ca un mijloc de investigaţie numerică performant, utilizat în sprijinul unei activităţi de cercetare, dezvoltare şi analiză de înalt nivel.

Versiunea completă a pachetului de programe MATLAB conţine o întreagă familie de module specifice, denumite tool-box-uri, respectiv blockset-uri, care permit rezolvarea unor aplicaţii din diverse domenii cum ar fi: maşini, aparate şi acţionări electrice, control de sistem, aplicaţii DSP, procesarea materialelor şi electro-tehnologii, procesare de semnal, mecanică, industria aeronautică şi de automobile, statistică, finanţe şi multe altele.

Aceste module sunt colecţii de funcţii MATLAB (M-files), uşor de asimilat, care extind puterea de calcul a pachetului de programe MATLAB în vederea rezolvării unor clase particulare de probleme. Colecţia de module MATLAB conţine: Simulink, DSP, Control System, SimPowerSystems, SimMechanics, Data Acquisition, Fuzzy Logic, Image Processing, Partial Differential Equations, Neural Network, Optimization, System Identification, Financial, Statistics, Communications, Database, Virtual Reality etc.

1.2. Structura sistemului MATLAB

Structura sistemului MATLAB constă în cinci părţi principale:

Mediul de dezvoltare. Acesta este alcătuit dintr-un set de unelte care facilitează folosirea funcţiilor şi fişierelor MATLAB. Multe dintre acestea reprezintă de fapt interfeţele grafice şi includ fereastra principală MATLAB sau ***MATLAB Desktop***, fereastra de comenzi sau ***Command Window***, fereastra ce memorează istoria comenzilor sau ***Command History***, şi browser-ele de ***Help***, ***Workspace***, ***Files***, ***Search Path*** etc.

Biblioteca de funcţii matematice MATLAB. Aceasta constă într-o vastă colecţie de algoritmi de calcul, pornind de la funcţii elementare precum sumă, sinus, cosinus şi aritmetică complexă, pană la funcţii mai sofisticate precum inversare de matrici, calcul de valori proprii, funcţii Bessel, şi transformata Fourier.

Limbajul MATLAB. Limbajul MATLAB este un limbaj matrice/vector de înalt nivel ce include instrucţiuni de control al buclelor, funcţii, structuri de date, comenzi de intrare/ieşire şi instrucţiuni de programare orientată pe obiecte. Limbajul MATLAB permite atât ”programarea superficială” pentru crearea rapidă a unor mici programe de calcul specifice, cât şi "programarea în detaliu" în vederea dezvoltării unor programe complexe de nivel superior.

Handle Graphics®. ***Handle Graphics*** reprezintă sistemul de grafică MATLAB şi include atât comenzi de înalt nivel pentru vizualizarea 2D şi 3D a datelor, procesare de imagini, animaţie şi grafică, cât şi comenzi de jos nivel ce permit personalizarea completă a reprezentărilor grafice şi construirea integrală a interfeţelor grafice (GUI) pentru aplicaţiile MATLAB.

MATLAB Application Program Interface (API). Aceasta este o bibliotecă ce permite scrierea programelor C şi Fortran ce interacţionează cu MATLAB. Biblioteca conţine facilitaţi de apel de subrutine din MATLAB (dynamic linking), de apelare a MATLAB-ul ca pe o maşină de calcul, şi de citire şi scriere de fişiere MAT-files.

1.3. Lansarea şi ieşirea din MATLAB

1.3.1. Comenzi de lansare MATLAB. Există mai multe modalităţi de lansare a pachetului de programe MATLAB, şi anume:

A)

- ***Dublu-clic*** pe icoana ***MATLAB*** de pe ***Desktop***



B)

- ***Clic*** pe ***START***



- ***Clic*** pe ***MATLAB***



C)

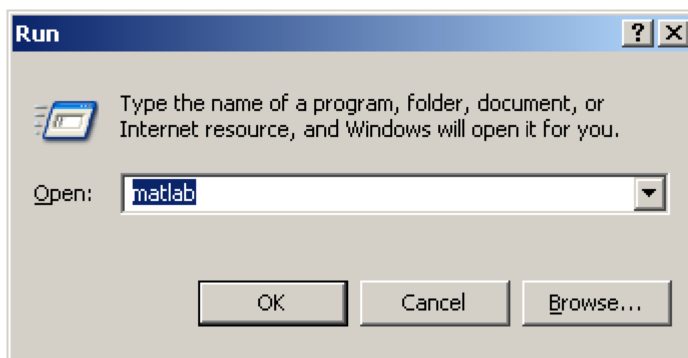
- ***Clic*** pe ***START***



- ***Clic*** pe ***Run***



- ***Tastaţi*** ”***matlab***”

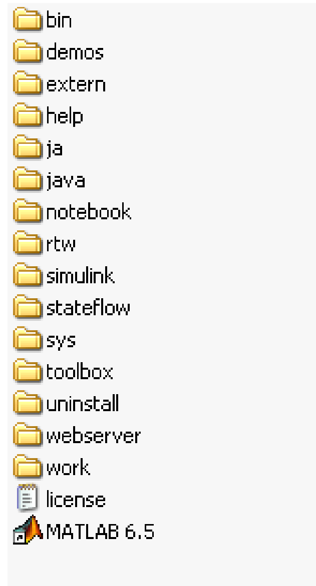


- ***Clic*** pe ***OK***



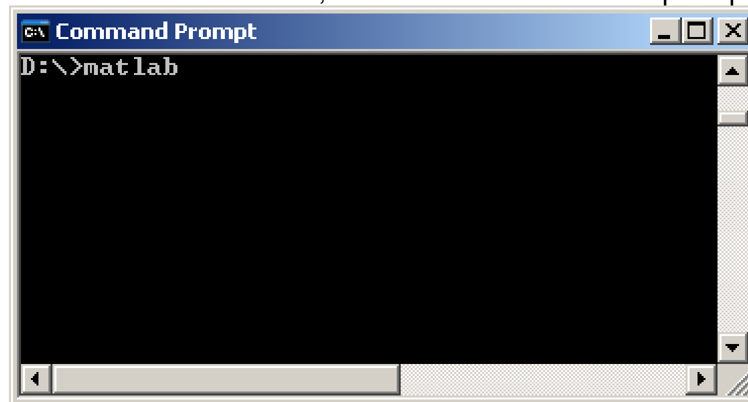
D)

- ***Dublu-clic*** pe ***shortcut-ul "MATLAB 6.5"*** din directorul de instalare ***C:/MATLAB6p5/***



E)

- În cazul lansării dintr-o fereastră DOS, ***se tastează "matlab"*** la promptul ***DOS***.

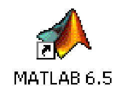


F)

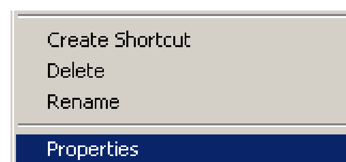
- Etc.

1.3.2. Opţiuni de lansare MATLAB. Există mai multe opţiuni de lansare MATLAB, acestea putând fi activate la lansarea programului, în felul următor:

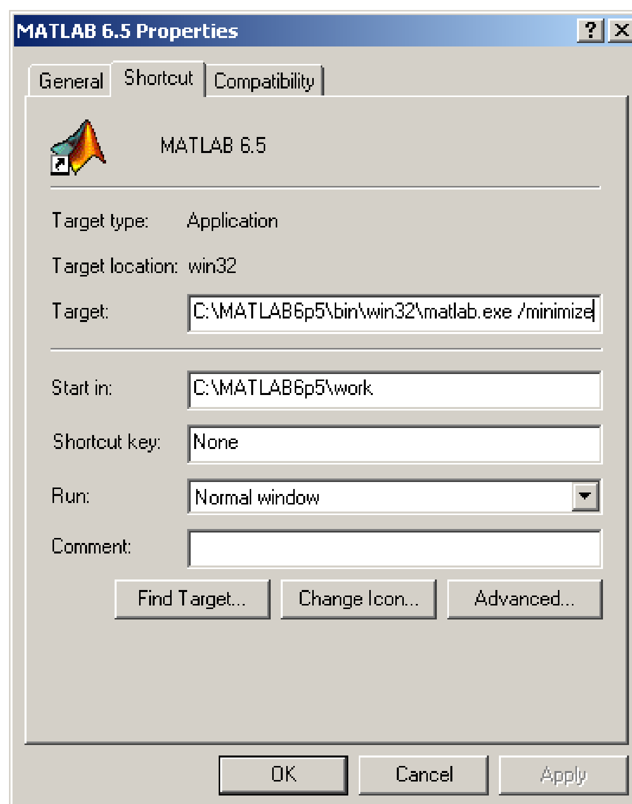
- ***Clic-dreapta*** pe icoana ***MATLAB*** de pe Desktop



- ***Clic*** pe ***Properties*** în meniul contextual



- ***Tastaţi*** în câmpul ***Target***, după calea către ***"matlab.exe"***, una sau mai multe opţiuni de lansare, cum ar fi opţiunea ***/minimize***:



Acţiunile corespunzătoare diverselor opţiuni de lansare MATLAB sunt prezentate în tabelul următor:

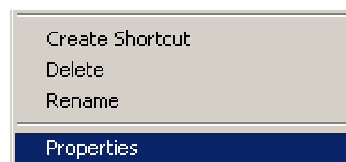
Opţiune	Acţiune
/minimize	Lansare MATLAB în format minimizat, fără afişare de splash.
/nosplash	Lansare MATLAB fără afişare splash.
/r M_file	Lansare MATLAB împreună cu lansarea automată a fişierului cu numele M_file.

1.3.3. Alegerea directorului MATLAB de lucru. Directorul MATLAB de lucru poate fi selectat înainte de lansarea programului, respectând următoarea secvenţă de comenzi:

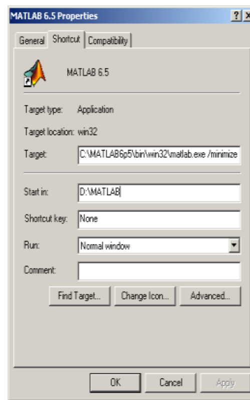
- ***Clic-dreapta*** pe ***icoana MATLAB*** de pe ***Desktop***



- ***Clic*** pe ***Properties*** în meniul contextual



- ***Tastaţi*** calea de acces către directorul de lucru, în câmpul ***Start in***, ca de exemplu calea ***D:\MATLAB:***



- ***Enter*** sau ***clic*** pe ***OK*** 

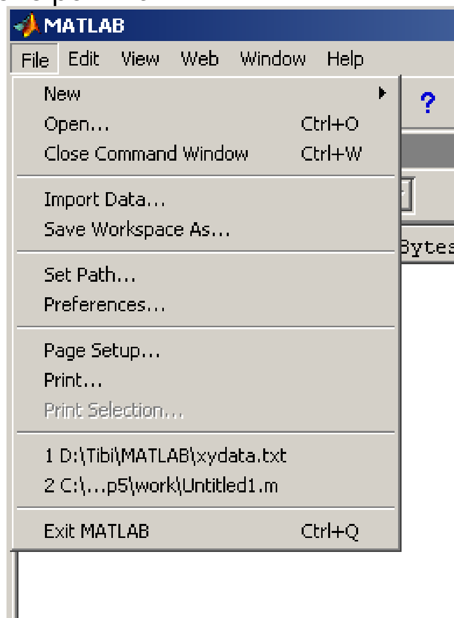
Directorul MATLAB de lucru poate fi selectat şi după lansarea programului.

1.3.4. Comenzi de ieşire din MATLAB

Pentru părăsirea programului MATLAB se poate acţiona în mai multe feluri, şi anume:

A)

- ***Clicaţi*** pe meniul ***File*** + ***clic*** pe ***Exit MATLAB***



B)

- ***Clicaţi*** pe ***close box***-ul ferestrei MATLAB Desktop

C)

- ***Tastaţi*** ”***exit***” sau ”***quit***” în ***Command Window***



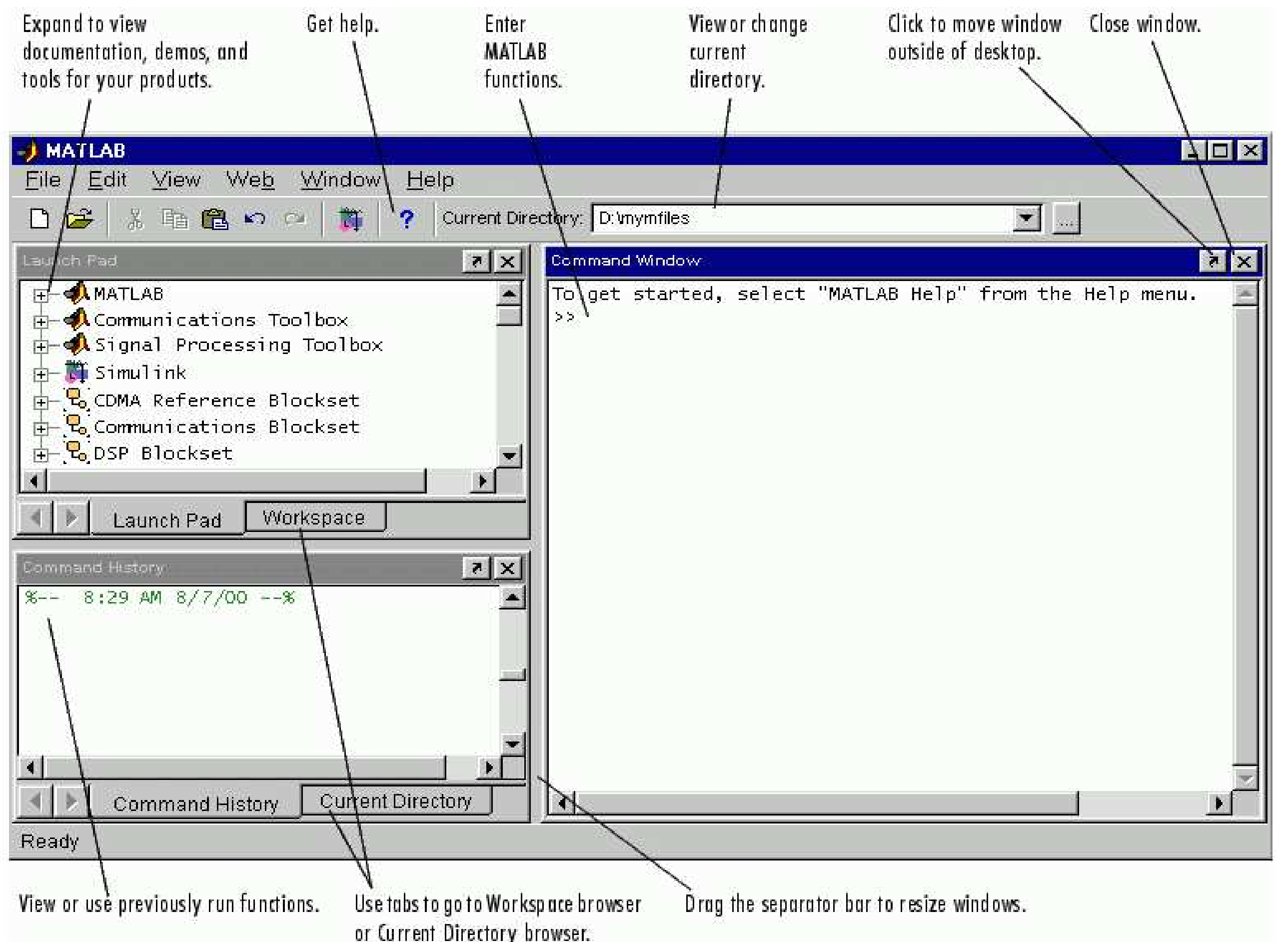
- ***Apăsaţi*** pe tasta ***Enter*** sau ***Return***

D)

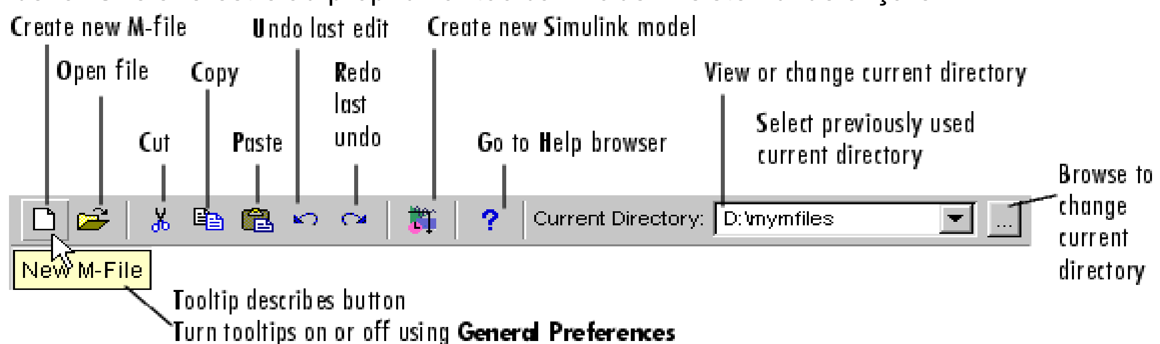
- Etc.

1.4. Ferestrele de lucru MATLAB

1.4.1. Fereastra principală MATLAB (*MATLAB Desktop*). După lansarea programului MATLAB, în prim plan apare fereastra principală MATLAB, ce conţine unelte de control al directoarelor, fişierelor, variabilelor şi al aplicaţiilor asociate MATLAB-ului.



MATLAB Desktop Toolbar permite accesul uşor la uneltele clasice MATLAB. Ţinând cursorul deasupra unui buton, o indicaţie ajutătoare descriind unealta, va apare într-o căsuţă galbenă. Unele ferestre au propriul lor toolbar inclus în sistemul de afişare.



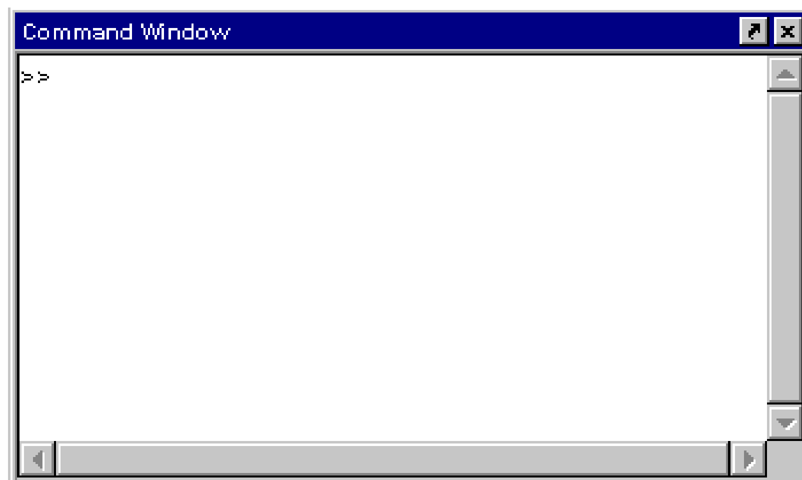
1.4.2. Ferestrele Desktop-ului. Următoarele ferestre sunt supervizate de *MATLAB Desktop*, deşi nu toate apar implicit după lansare:

- Fereastra de comenzi (***Command Window***), permite lansarea comenzilor MATLAB;
- Fereastra ***Command History***, permite memorarea, vizualizarea, editarea şi relansarea funcţiilor lansate anterior în ***Command Window***.
- Fereastra ***Launch Pad***, permite lansarea uneltelor şi accesarea documentaţiei MATLAB
- Fereastra ***Current Directory Browser***, permite controlul asupra fişierelor MATLAB şi a celor asociate
- Fereastra ***Help Browser***, permite vizualizarea şi căutarea documentaţiei MATLAB
- Fereastra ***Workspace Browser*** permite vizualizarea şi schimbarea conţinutului spaţiului de lucru

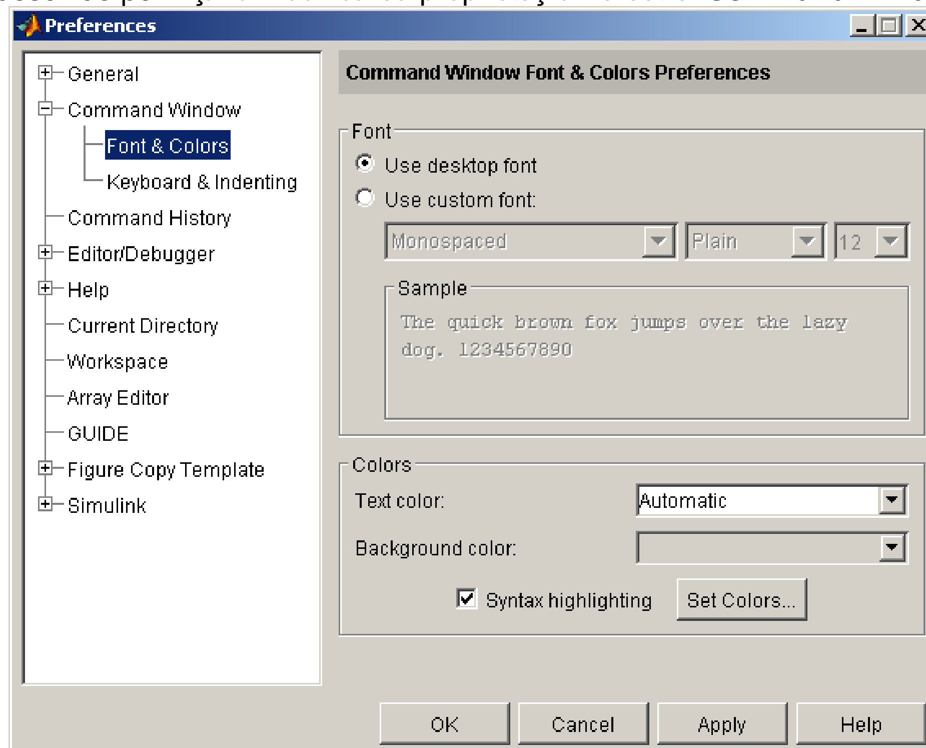
* Fereastra ***Array Editor*** permite editarea şi vizualizarea conţinutului variabilelor într-un format tabelar
* Fereastra ***Editor/Debugger*** permite crearea, editarea şi verificarea fişierelor M-files ce conţin funcţii MATLAB.

Alte unelte şi ferestre MATLAB cum ar fi ferestrele grafice nu sunt supervizate de ***MATLAB Desktop***.

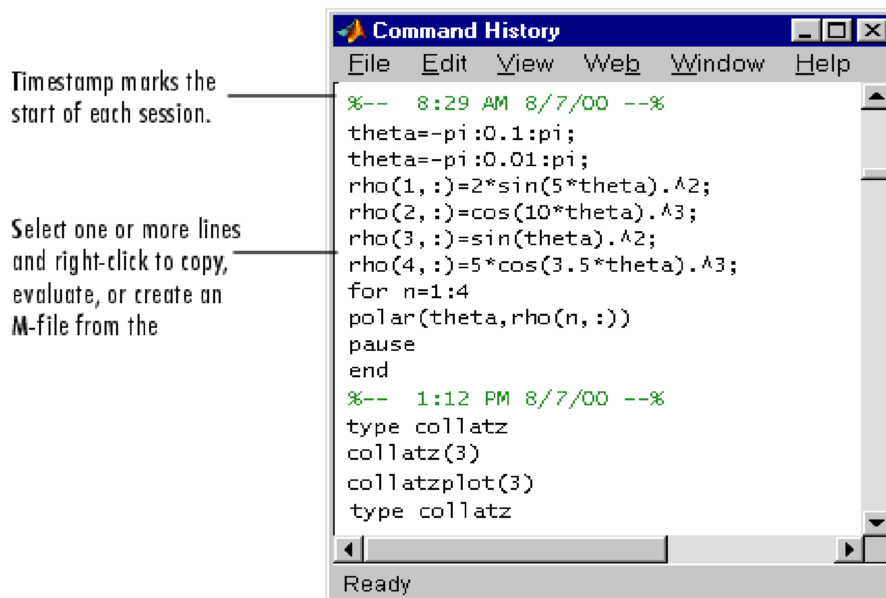
1.4.2.1. Command Window. ***Command Window*** este fereastra principală de comunicare a utilizatorului cu programul MATLAB. Această fereastră permite lansare de funcţii şi efectuarea de operaţii MATLAB. Pentru deschiderea ferestrei se selectează ***Command Window*** din meniul ***View***.



Proprietăţile specifice ferestrei ***Command Window*** permit modificarea formatului de afişare a valorilor numerice, setarea automată a ecoului în cadrul unei sesiuni MATLAB, specificarea fontului, a stilului, a dimensiunii literelor, setarea culorilor folosite pentru sublinierea instrucţiunilor specifice etc. Pentru afişarea cutiei de dialog cu proprietăţile ferestrei ***Command Window***, selectaţi ***Preferences*** din meniul ***File*** al ***MATLAB Desktop***. Cutia de dialog se deschide permiţând modificarea proprietăţilor ferestrei ***Command Window***.



1.4.2.2. Fereastra *Command Hyistory*. Fereastra ***Command History*** apare când lansaţi MATLAB. Fereastra ***Command History*** afişează o listă a funcţiilor lansate recent în ***Command Window***.



Afişarea funcţiilor în Command History Window. Lista de comenzi afişate în ***Command History*** include atât funcţii din sesiunea curenta cât şi funcţii din sesiuni anterioare. Ora şi data pentru fiecare sesiune apare în partea superioara a listei de funcţii aferente acelei sesiuni de lucru. Folosiţi ***scroll-bar***-ul sau săgeţile up şi down pentru a naviga în fereastra ***Command History***. Fişierul specific uneltei ***Command History*** este ***history.m***. Tastaţi ***prefdir*** în ***Command Window*** pentru a vedea locaţia acestui fişier. Fişierul ***history.m*** este încărcat odată cu lansarea programului MATLAB şi suprascris când ieşiţi din MATLAB.

Ştergerea funcţiilor din Command History Window. Se recomandă ştergerea funcţiilor din ***Command History window*** când se strâng prea multe şi navigarea devine dificilă. Toate funcţiile sunt înregistrate până când alegeţi opţiunea de a le şterge. Pentru a şterge o funcţie, selectaţi funcţia sau folosiţi ***Shift+clic*** sau ***Ctrl+clic*** pentru a selecta mai multe, sau folosiţi ***Ctrl+A*** pentru a le selecta pe toate. Apoi ***clic-dreapta*** şi selectaţi una dintre opţiunile de ştergere din meniul contextual:

Delete Selection – şterge funcţia selectată

Delete to Selection – şterge toate funcţiile anterioare până la cea selectată

Delete Entire History – şterge toate funcţiile din ***Command History window***

O altă cale de ştergerea a întregii liste de funcţii constă în selectarea comenzii ***Clear Command History*** din meniul ***Edit***.

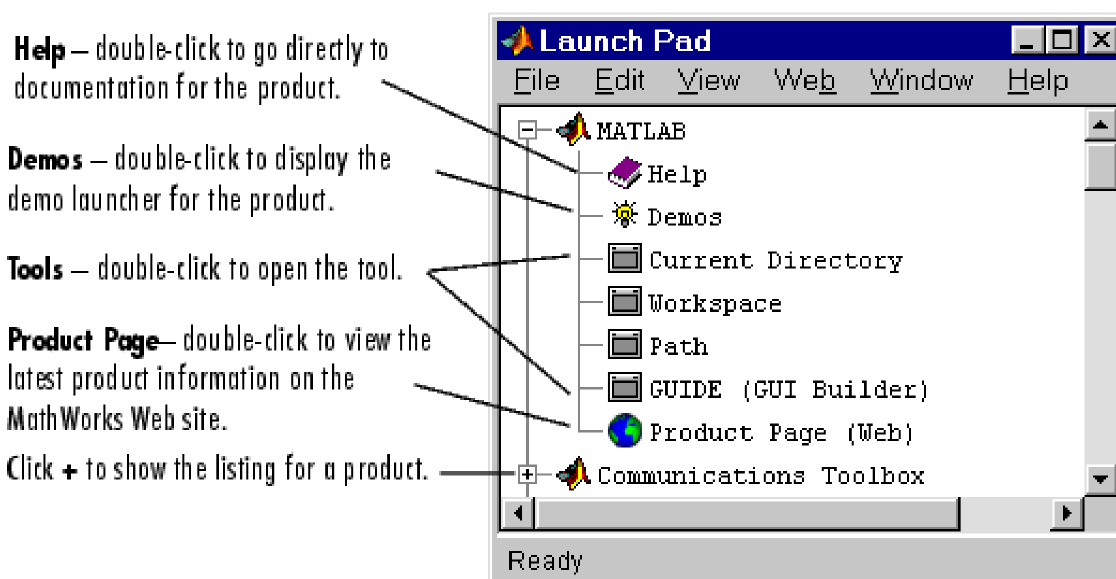
Lansarea funcţiilor din Command History Window. Dublu-clic pe orice funcţie din ***Command History window*** pentru a executa acea funcţie. De exemplu, ***dublu-clic*** pe ***edit myfile*** pentru a deschide fişierul ***myfile.m*** în ***Editor***. Puteţi deasemenea lansa o funcţie cu ***clic-dreapta*** pe funcţie şi selectând ***Evaluate Selection*** din meniul contextual, sau copiind funcţia în ***Command Window***.

Copierea funcţiilor din Command History Window. Selectaţi o funcţie, sau cu ***Shift+clic*** sau ***Ctrl+clic*** selectaţi mai multe funcţii, sau folosiţi ***Ctrl+A*** pentru a selecta toate funcţiile. Apoi puteţi executa următoarele comenzi.

Acţiune	Mod de lucru
Lansarea funcţiilor în ***Command Window***	***Copiaţi*** selecţia în clipboard prin ***clic-dreapta*** şi selectarea opţiunii ***Copy*** din meniul contextual. Selecţia se copiază cu ***Paste*** în ***Command Window*** (altă alternativă constă în executarea unui dragging al selecţiei în ***Command Window***). În ***Command Window*** se editează la nevoie funcţia şi se apasă pe ***Enter*** sau ***Return*** pentru executarea funcţiei.

Copierea funcţiilor în altă fereastra	***Copiaţi*** selecţia în clipboard prin ***clic-dreapta*** şi selecţia comenzii ***Copy*** din meniul contextual. Copiaţi selecţia într-un fişier M-file deschis în ***Editor*** sau altă aplicaţie.
Crearea unui fişier M-file din funcţiile selectate	***Clic-dreapta*** pe selecţie şi selectează ***Create M-File*** din meniul contextual. ***Editor***-ul deschide un nou fişier ***M-file*** ce conţine funcţiile pe care le-aţi selectat din ***Command History window***.

1.4.2.3. Fereastra *Launch Pad*. Fereasta ***Launch Pad*** din MATLAB permite accesul uşor la unelte, demo-uri, şi documentaţia produselor MathWorks. Pentru lansare selectaţi ***Launch Pad*** din meniul ***View*** din ***MATLAB Desktop***. Îndată sunt listate toate produsele MathWorks instalate pe sistemul dvs.



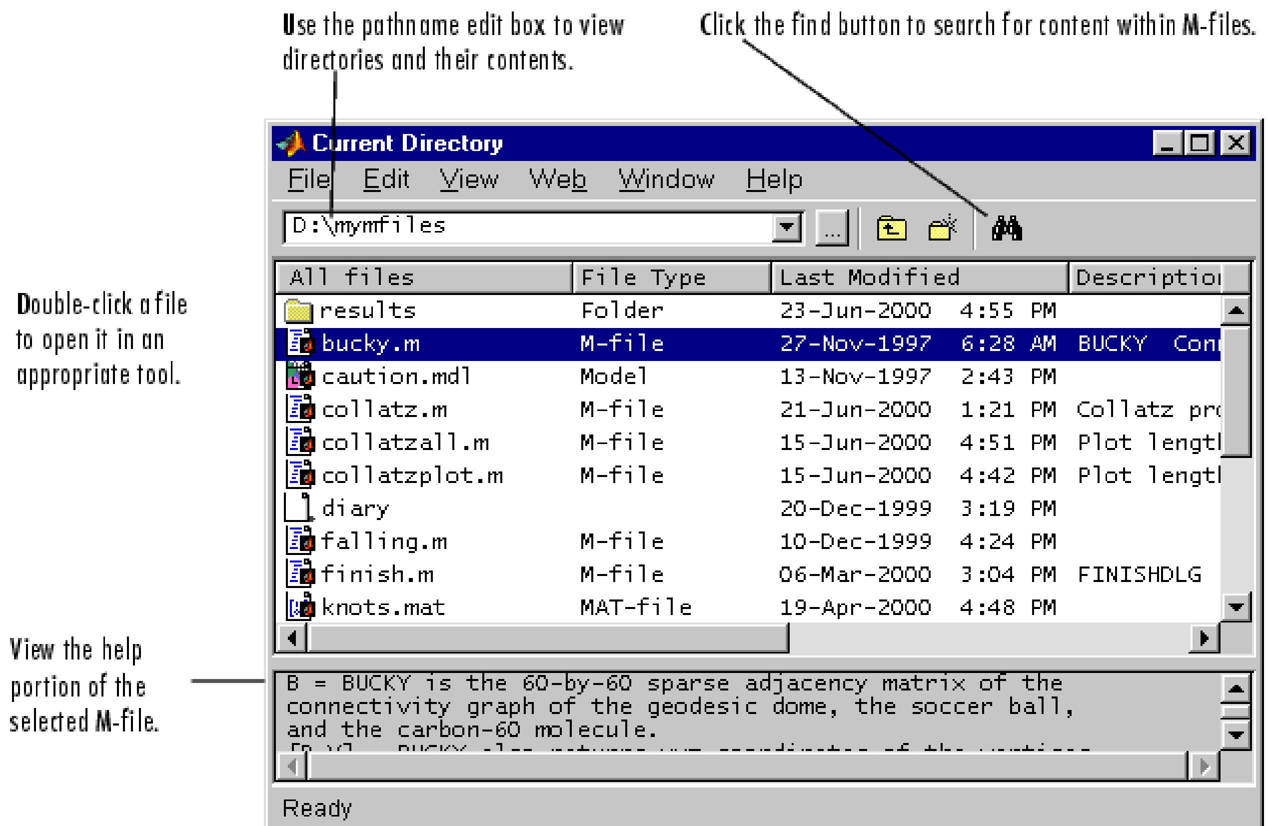
Pentru listarea în detaliu a unui produs, ***clicaţi*** pe semnul **+** plasat în stânga produsului. Pentru a anula listarea, ***clicaţi*** pe semnul **–** din stânga produsului. Pentru a deschide una sau mai multe liste, ***dublu-clic*** pe lista, sau ***clic-dreapta*** şi selectaţi **Open** din meniul contextual. Acţiunea depinde de lista pe care aţi selectat-o, după cum este prezentat în tabelul următor.

Icoana	Descrierea acţiunii în urma lansării
	Documentaţia produsului respectiv se deschide în fereastra ***Help browser***
	Se lansează ***Demo launcher*** al produsului respectiv
	Unealta selectată se deschide
	Pagina web a produsului pe site-ul MathWorks Web cu informaţii recente se deschide în browser-ul dvs. Web

Actualizarea ferestrei Launch Pad. Fereastra ***Launch Pad*** include comenzi pentru toatele produsele găsite în calea de căutare MATLAB când se lansează sesiunea MATLAB. Dacă schimbaţi calea de căutare după lansarea unei sesiuni, de pildă prin adăugarea unui director toolbox, fereastra ***Launch Pad*** nu este automat actualizată. ***Clic-dreapta*** în fereastra ***Launch Pad*** şi selectaţi ***Refresh*** din meniul contextual pentru a actualiza fereastra ***Launch Pad*** aşa încât sa afişeze toate produsele în calea curentă de căutare.

1.4.2.4. Current Directory Browser. Pentru a căuta, vizualiza, deschide, şi pentru a modifica directoare şi fişiere asociate MATLAB-ului, folosiţi ***Current Directory browser***. Pentru a deschide ***Current Directory browser***, selectaţi ***Current Directory*** din meniul ***View***

din ***MATLAB Desktop***, sau tastaţi ***filebrowser*** la promptul ***Command Window***. Puteţi deasemenea să o deschideţi din ***Launch Pad***, sub MATLAB.

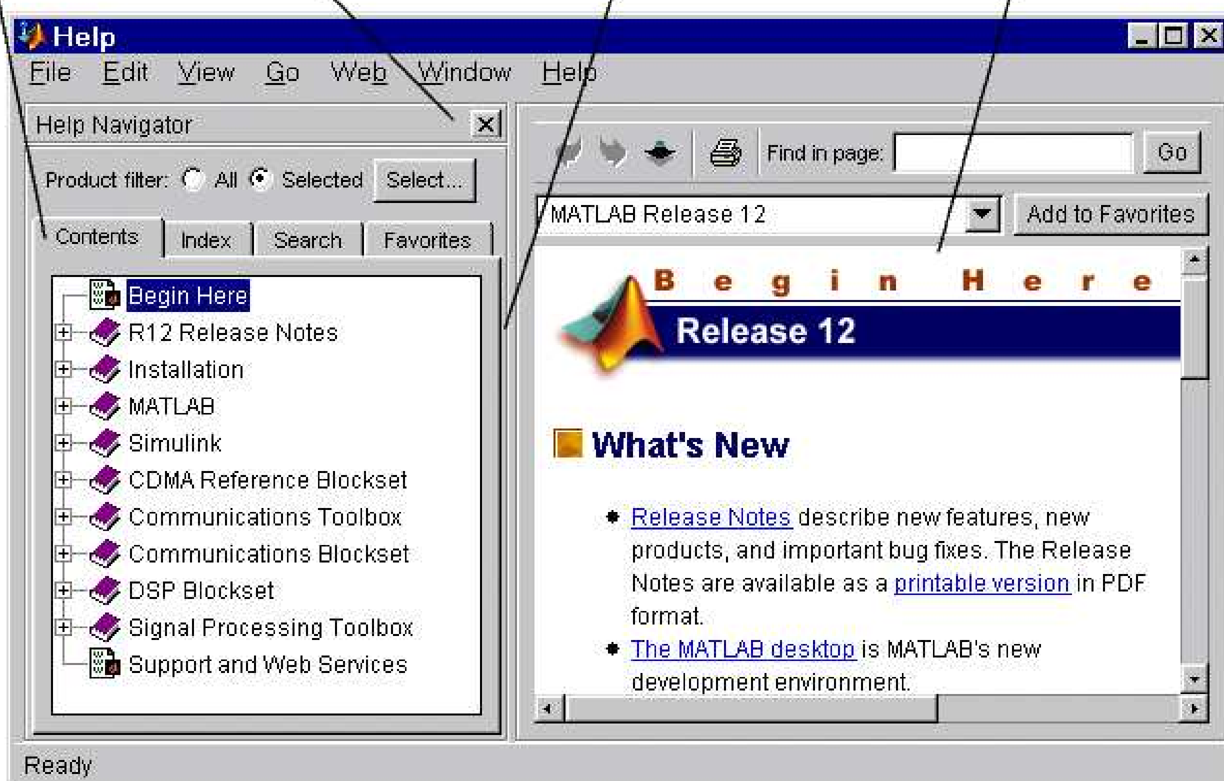


Principalele operaţiuni cu directoare şi fişiere ce pot fi efectuate folosind ***Current Directory browser*** sunt:

- vizualizarea şi modificarea directoarelor,
- crearea, redenumirea, copierea şi ştergerea directoarelor şi fişierelor,
- deschiderea fişierelor,
- lansarea şi vizualizarea conţinutului fişierelor,
- căutarea şi înlocuirea conţinutului fişierelor.

1.4.2.5. Fereastra Help Browser. Se foloseşte ***Help browser*** pentru căutarea şi vizualizarea documentaţiei MATLAB şi produsele MathWorks. ***Help browser*** este un ***Web browser*** integrat în MATLAB Desktop care afişează documente HTML. Pentru lansarea ***Help browser***:

- ***Clicaţi*** pe butonul ***help*** ? din ***toolbar*** sau
- ***Tastaţi helpbrowser*** în ***Command Window*** sau
- ***Selectaţi Help*** din meniul ***View*** sau
- Folosiţi meniul ***Help*** în orice unealtă MATLAB.



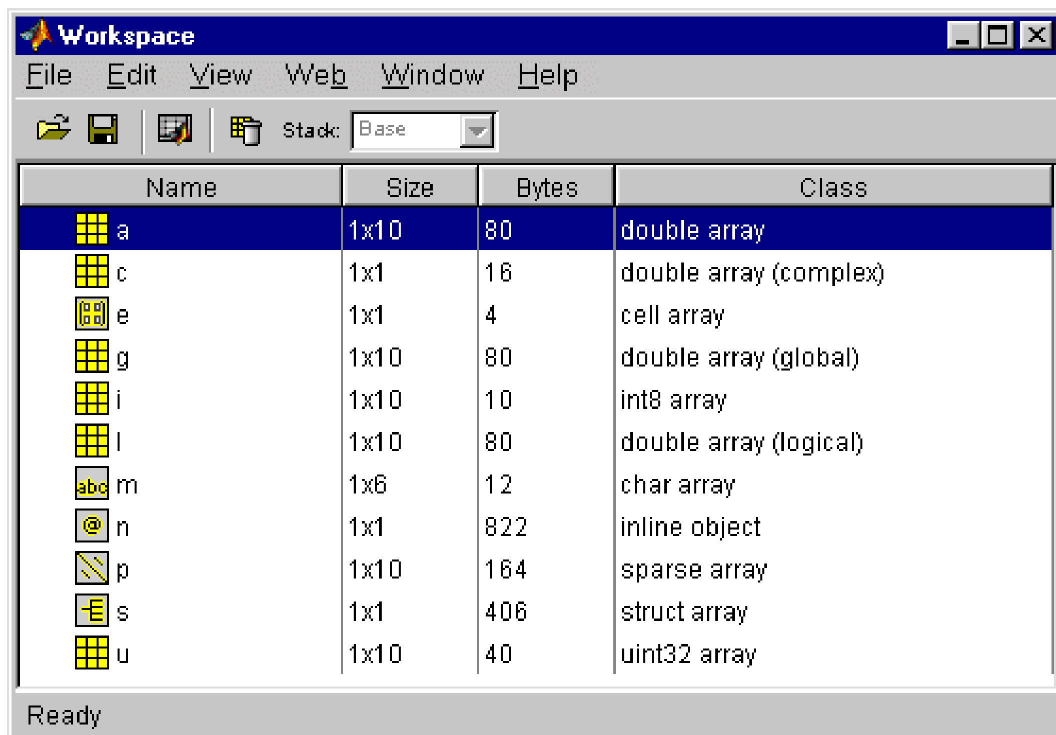
Help browser conţine două paneluri:

- Panelul ***Help Navigator*** din stânga, care se foloseşte pentru căutarea informaţiei. Acesta include un filtru ***Product Filter*** şi ferestrele ***Contents***, ***Index***, ***Search***, şi ***Favorites***.
- Panelul ***display*** din dreapta, folosit pentru vizualizarea documentaţiei.

Proprietăţile specifice ferestrei ***Help Browser*** pot fi modificate selectând ***Preferences*** din meniul ***File*** al ferestrei ***MATLAB Desktop***. Cutia de dialog se deschide şi permite selectarea opţiunii ***Help*** în urma căreia se deschide fereastra ***Help Preferences*** pentru modificarea proprietăţilor ferestrei ***Help Browser***. Se pot modifica caracteristicile fontului folosit în ferestrele ***Help Browser***, se poate selecta locaţia documentaţiei, etc.

1.4.2.6. Fereastra Workspace Browser. Folosiţi ***Workspace browser*** pentru executare de operaţiuni în spaţiul de lucru MATLAB. Pentru a lansa ***Workspace browser***, există mai multe modalităţi şi anume:

- Din meniul ***View*** din ***MATLAB Desktop***, ***selectaţi Workspace***,
- În ***Launch Pad***, ***dublu-clic*** pe ***Workspace***,
- ***Tastaţi workspace*** la promptul ***Command Window***.



Name	Size	Bytes	Class
a	1x10	80	double array
c	1x1	16	double array (complex)
e	1x1	4	cell array
g	1x10	80	double array (global)
i	1x10	10	int8 array
l	1x10	80	double array (logical)
m	1x6	12	char array
n	1x1	822	inline object
p	1x10	164	sparse array
s	1x1	406	struct array
u	1x10	40	uint32 array

Printre operaţiunile ce pot fi executate din ***Workspace browser*** sunt:

- vizualizarea ***Current Workspace***
- salvarea ***Current Workspace***
- încărcarea ***Saved Workspace***
- ştergerea ***Workspace Variables***
- crearea graficelor din ***Workspace Browser***
- vizualizarea şi editarea ***Workspace Variables*** folosind ***Array Editor***

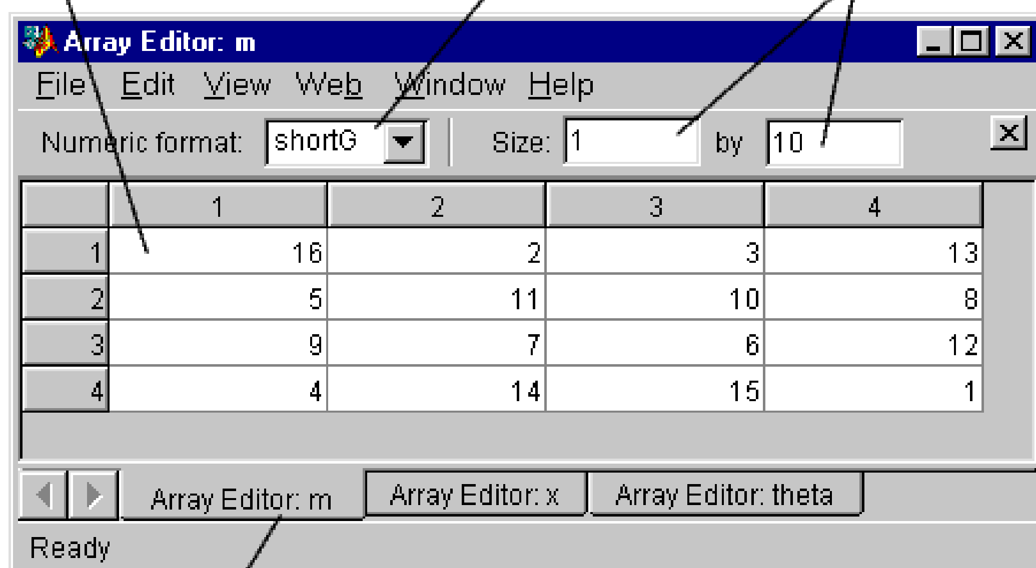
Proprietăţile specifice ferestrei ***Workspace Browser*** pot fi modificate selectând ***Preferences*** din meniul ***File*** al ferestrei ***MATLAB Desktop***. Cutia de dialog se deschide şi permite selectarea opţiunii ***Workspace*** în urma căreia se deschide fereastra ***Workspace Preferences*** pentru modificarea proprietăţilor ferestrei ***Workspace***. Se pot modifica caracteristicile fontului folosit în ***Workspace browser*** şi se poate opţiona pentru afişarea unei căsuţe de dialog de confirmare a ştergerii variabilelor.

1.4.2.7. Fereastra Array Editor. ***Array Editor*** se foloseşte pentru afişarea şi editarea unei reprezentări vizuale 1D şi 2D a vectorilor de tip numere, şiruri de caractere etc. Pentru a lansa ***Array Editor*** din ***Workspace browser*** se selectează în ***Workspace browser*** variabila pe care doriţi să o afişaţi (***Shift+clic*** sau ***Ctrl+clic*** pentru a selecta mai multe variabile). ***Clicaţi*** pe butonul ***open*** de pe ***toolbar***, sau ***clic-dreapta*** şi selectaţi ***Open Selection*** din meniul contextual. Alternativ, în cazul unei singure variabile, puteţi face ***dublu-clic*** pe aceasta pentru a o deschide. ***Array Editor*** se lansează, afişând valorile variabilelor selectate. Nu puteţi deschide un vector cu 10,000 elemente sau mai multe.

Pentru a afişa conţinutul unei variabile în workspace, tastaţi numele variabilei la promptul ***Command Window***.

Pentru a afişa o variabila în ***Array Editor***, folosiţi funcţia ***openvar('nume_variabila')*** având ca argument numele variabilei pe care doriţi sa o afişaţi.

Change values of array elements. Change the display format. Change the dimensions of the array.



Use the tabs to view the different variables you have open in the Array Editor.

Modificarea valorilor elementelor în Array Editor. În ***Array Editor***, ***clicaţi*** pe celula a cărei valoare doriţi să o modificaţi. Tastaţi o nouă valoare. Apăsaţi ***Enter*** sau ***Return***, sau ***clicaţi*** în alta celula şi modificarea va avea loc. Pentru a modifica dimensiunile unui vector, ***tastaţi*** noile valori corespunzând numărului de rânduri şi coloane în ***Size fields***. Dacă creşteţi dimensiunea, noile rânduri şi coloane sunt adăugate la sfârşit şi sunt umplute cu zerouri. Dacă descreşteţi dimensiunea, veţi pierde datele; MATLAB şterge rândurile şi coloanele de la sfârşit. Anumite tipuri de date nu permit modificarea dimensiunii; pentru aceste variabile, câmpul ***Size*** nu este editabil. Dacă deschideţi un fişier MAT-file existent şi efectuaţi modificări asupra acestuia folosind ***Array Editor***, va trebui sa salvaţi acel MAT-file dacă doriţi ca schimbările sa fie salvate.

Controlul afişării valorilor în Array Editor. În ***Array Editor***, selectaţi o variabilă în lista ***Numeric format*** pentru a controla modul de afişare a valorilor numerice.

Proprietăţile specifice ferestrei ***Array Editor*** pot fi modificate selectând ***Preferences*** din meniul ***File*** al ferestrei ***MATLAB Desktop***. Cutia de dialog se deschide şi permite selectarea opţiunii ***Array Editor*** în urma căreia se deschide fereastra ***Array Editor Preferences*** de modificare a proprietăţilor. Se pot modifica caracteristicile fontului folosit în fereastra ***Array Editor***, se poate selecta formatul numeric implicit etc.

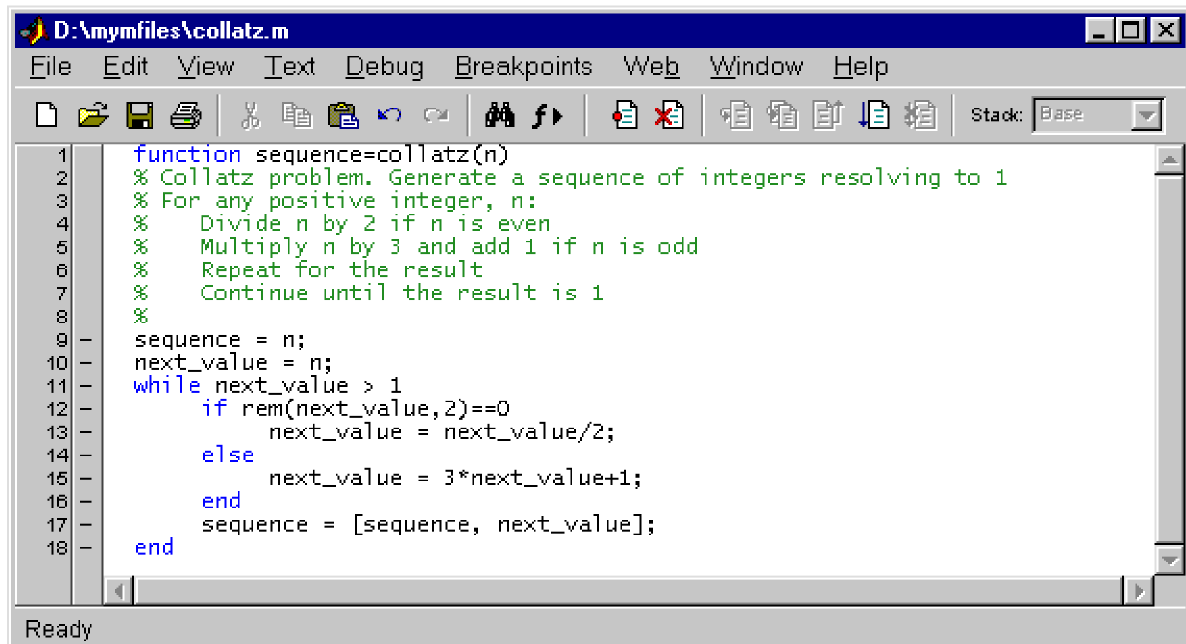
1.4.2.7. Fereastra Editor/Debugger. Fereastra ***Editor/Debugger*** a MATLAB-ului pune la dispoziţie o interfaţă grafică cu utilizatorul ce permite editarea elementara de text şi verificarea (debugging) oricărui tip de fişier M-file. ***Editor/Debugger*** este o unealtă care se poate folosi pentru editare, debugging sau ambele. Există diferite modalităţi de lansare a ferestrei ***Editor/Debugger***:

Lansarea ferestrei Editor/Debugger în vederea creării unui nou fişier M-File. Pentru a crea un nou fişier M-file în ***Editor/Debugger***, fie ***clicati*** pe butonul ***new file*** din ***toolbar-ul*** MATLAB, sau selectaţi ***File + New + M-file*** din meniul ***MATLAB Desktop***. Puteţi deasemenea crea un fişier M-file folosind meniul contextual în ***Current Directory browser***. ***Editor/Debugger*** se deschide daca nu cumva deja este deschisă, cu un fişier gol în care puteţi scrie instrucţiunile fişierului M-file.

Daca ***Editor/Debugger*** este deschis, puteţi crea mai multe fişiere noi folosind butonul ***new file*** din ***toolbar***, sau selectaţi ***File*** + ***New*** + ***M-file***. Funcţia echivalentă de creare a fişierelor M-file noi în ***Editor/Debugger*** este funcţia ***edit*** tastată în ***Command Window***. Daca tastaţi ***edit filename.m*** şi fişierul cu acest nume nu există încă, apare un mesaj care

va întreabă dacă doriţi sa creaţi un nou fişier cu numele ***filename.m***. Daca alegeţi ***da***, ***Editor/Debugger*** creează un fişier gol cu numele ***filename.m***, altfel fişierul nu va fi creat.

Lansarea ferestrei Editor/Debugger pentru deschiderea fişierelor M-Files existente. Pentru a deschide un fişier M-file existent în ***Editor/Debugger***, ***clicaţi*** pe butonul ***open*** din ***toolbar***-ul MATLAB sau ***Editor/Debugger***, sau selectaţi ***File*** + ***Open*** şi apoi din ***Open dialog box***, ***selectaţi*** fişierul M-file şi ***clicati*** pe ***Open***. Se pot deasemenea deschide fişiere din ***Current Directory browser***.

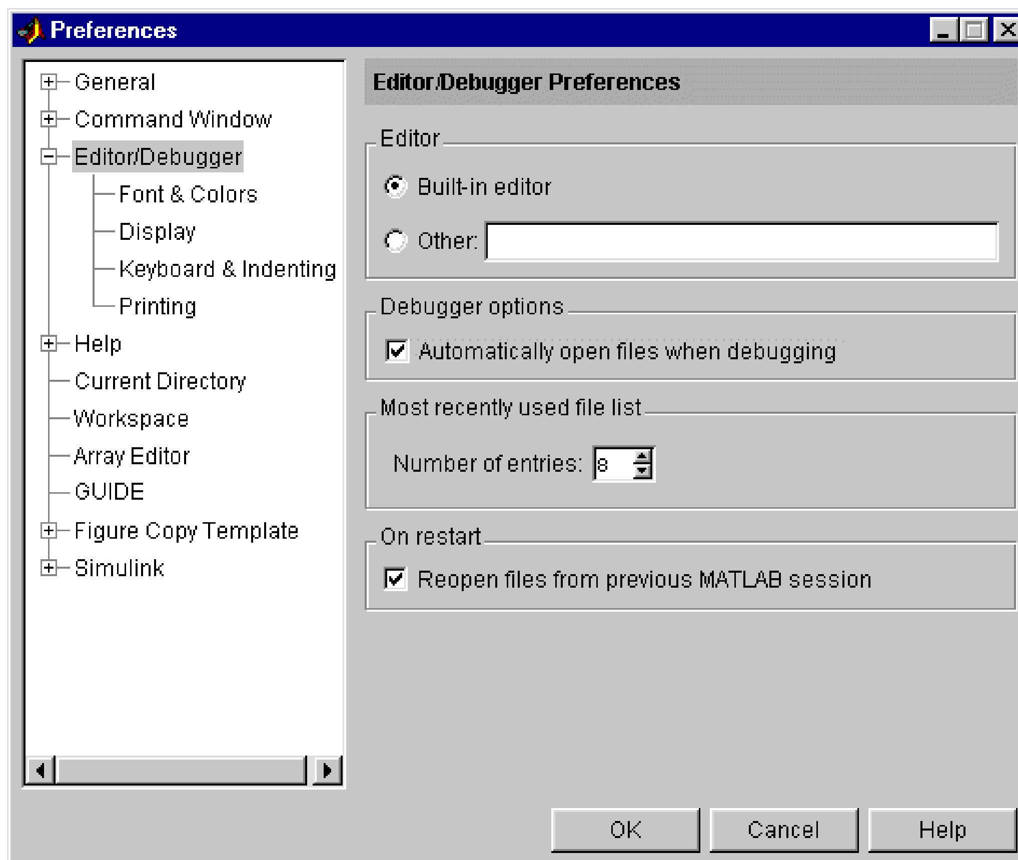


Puteţi selecta un fişier în vederea deschiderii din lista celor mai recent folosite fişiere, în partea inferioara a meniului ***File*** în ***MATLAB Desktop*** sau în ***Editor/Debugger***. Puteţi schimba numărul de fişiere care apar în listă.

O funcţie echivalentă folosită pentru editarea sau deschiderea unui fişier M-file existent în ***Editor/Debugger*** este funcţia ***edit filename.m***

Lansarea ferestrei Editor/Debugger fără a lansa MATLAB. Pe platformele Windows, puteţi folosi MATLAB Editor fără să lansaţi MATLAB prin ***dublu-clic*** pe fişierul M-file în ***Windows Explorer***. Fişierul M-file se deschide în ***MATLAB Editor***. Pentru a deschide fereastra ***Editor*** fără fişier, lansaţi fişierul ***MATLAB6p5/bin/win32/meditor.exe.*** Se pot deschide mai multe sesiuni simultane de ***meditor***. Când lansaţi ***MATLAB Editor*** fără lansare MATLAB, ***Editor*** devine o aplicaţie de sine stătătoare.

Proprietăţile ferestrei ***Editor/Debugger*** se pot modifica selectând ***Preferences*** din meniul ***File*** al ferestrei ***MATLAB Desktop***. Cutia de dialog se deschide şi permite selectarea opţiunii ***Editor/Debugger*** în urma căreia se deschide fereastra ***Editor/Debugger Preferences*** de modificare a proprietăţilor.



Se pot modifica caracteristicile fontului şi culorilor folosite în fereastra ***Editor/Debugger***, se poate selecta modul de afişare, salvare etc.

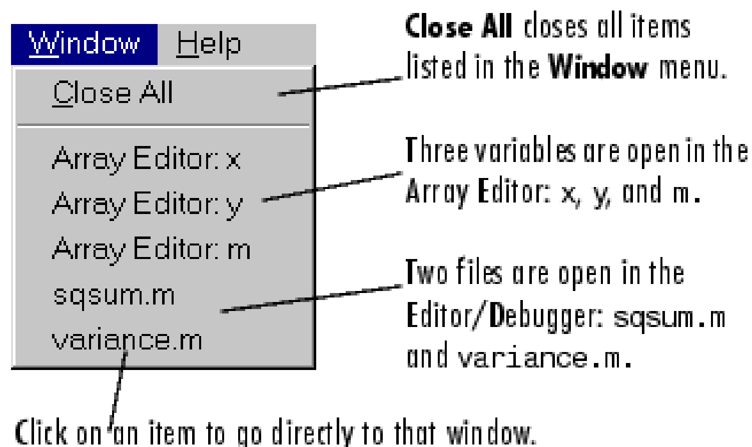
1.5. Configurarea Desktop-ului

1.5.1. Deschiderea uneltelor Desktop. Pentru a deschide o unealtă a desktop-ului, ***selectaţi*** unealta din meniul ***View*** sau ***dublu-clic*** pe unealta respectivă în lista de unelte afişate în ***Launch Pad***. Unealta se deschide în locaţia pe care o ocupa ultima data când a fost deschisă. Există câteva unelte controlate de ***MATLAB Desktop*** care nu se pot deschide din meniul ***View*** sau ***Launch Pad***, şi anume:

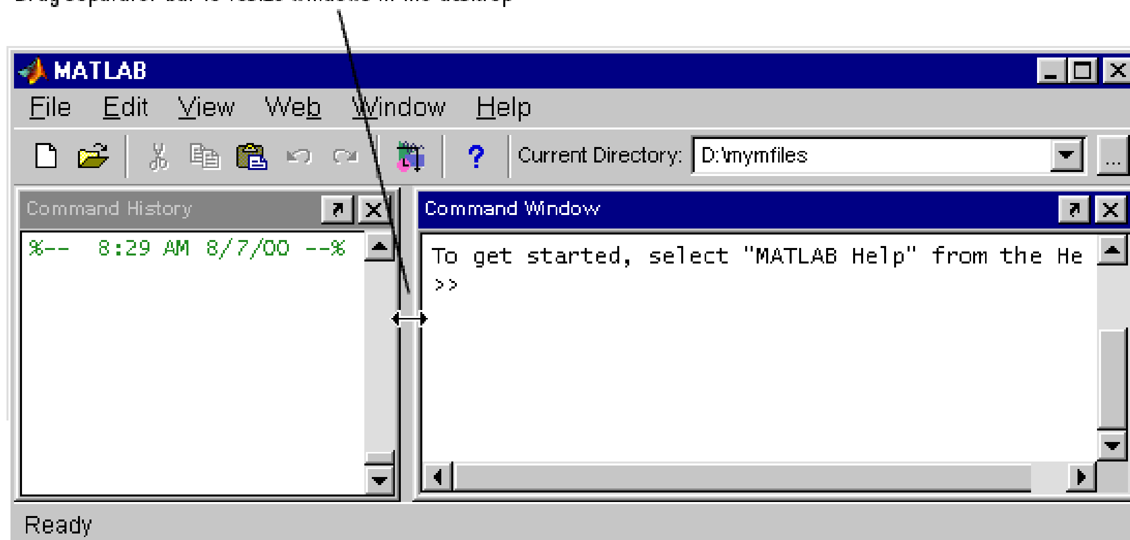
- ***Array Editor*** – care se deschide prin ***dublu-clic*** pe variabila în ***Workspace Browser***,
- ***Editor/Debugger*** – care se deschide prin crearea unui nou fişier M-file sau prin deschiderea unui fişier existent M-file.

Uneltele se pot deschide şi prin folosirea funcţiilor. De pildă, funcţia ***helpbrowser*** deschide ***Help browser***.

1.5.2. Căutarea documentelor folosind *Desktop Tools*. Meniul ***Window*** afişează toate documentele ***Editor/Debugger***, toate variabilele din ***Array Editor***, şi toate ferestrele figură. Selectaţi o entitate în meniul ***Window*** pentru a ajunge direct la acea fereastră sau document. Selectaţi ***Close All*** pentru a închide toate entităţile listate în meniul ***Window***. De pildă, meniul ***Window*** de mai jos ilustrează trei documente deschide în ***Array Editor*** şi două documente deschise în ***Editor/Debugger***. Selectând ***variance.m***, de pildă, determină fereastra ***Editor/Debugger*** cu fişierul ***variance.m*** deschis, sa devină fereastră activă.

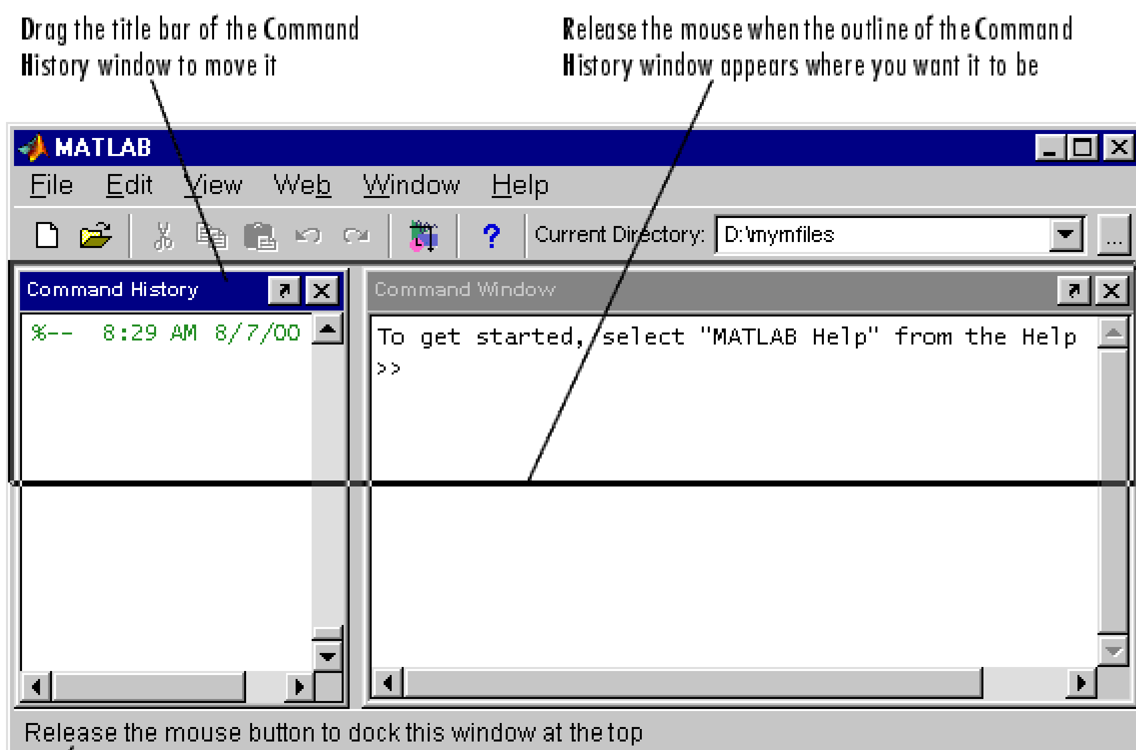


1.5.3. Redimensionarea ferestrelor. Pentru redimensionarea ferestrelor în MATLAB Desktop, se foloseşte bara separator, care este bară dintre două ferestre: ***Mutaţi cursorul*** deasupra barei separator. Cursorul capătă o altă formă. ***Draggaţi bara separator*** pentru a modifica dimensiunile ferestrelor.



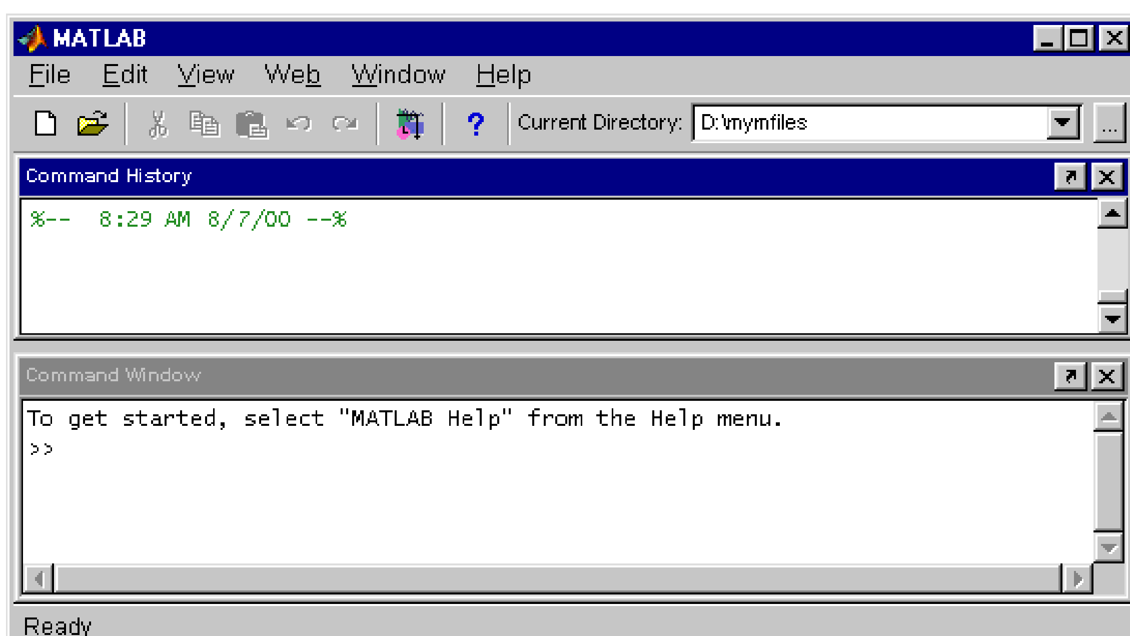
1.5.4. Mutarea ferestrelor. Exista trei modalităţi de bază de mutare a ferestrelor ***MATLAB Desktop***: mutare în interiorul ***MATLAB Desktop***, mutare în afara ***MATLAB Desktop***, mutare în interiorul ***MATLAB Desktop*** prin gruparea ferestrelor (***Tabbing***).

Mutare în interiorul MATLAB Desktop. Pentru a muta o fereastra într-o altă locaţie în ***MATLAB Desktop draggaţi title bar***-ul ferestrei spre noua locaţie. Pe măsura ce mutaţi fereastra, un contur al acesteia va deveni vizibil. Când conturul se apropie de o poziţie posibilă, conturul se fixează în acea locaţie. ***Status bar*** afişează instrucţiuni despre mutarea ferestrei în timpul schimbării conturului. În exemplul de mai jos, ***Command History window*** este iniţial la stânga ferestrei ***Command Window*** şi este mutată deasupra ***Command Window***. Când ***title bar***-ul ferestrei ***Command History*** atinge zona inferioară a ***toolbar***-ului, conturul devine vizibil.



The status bar displays instructions about moving the window.

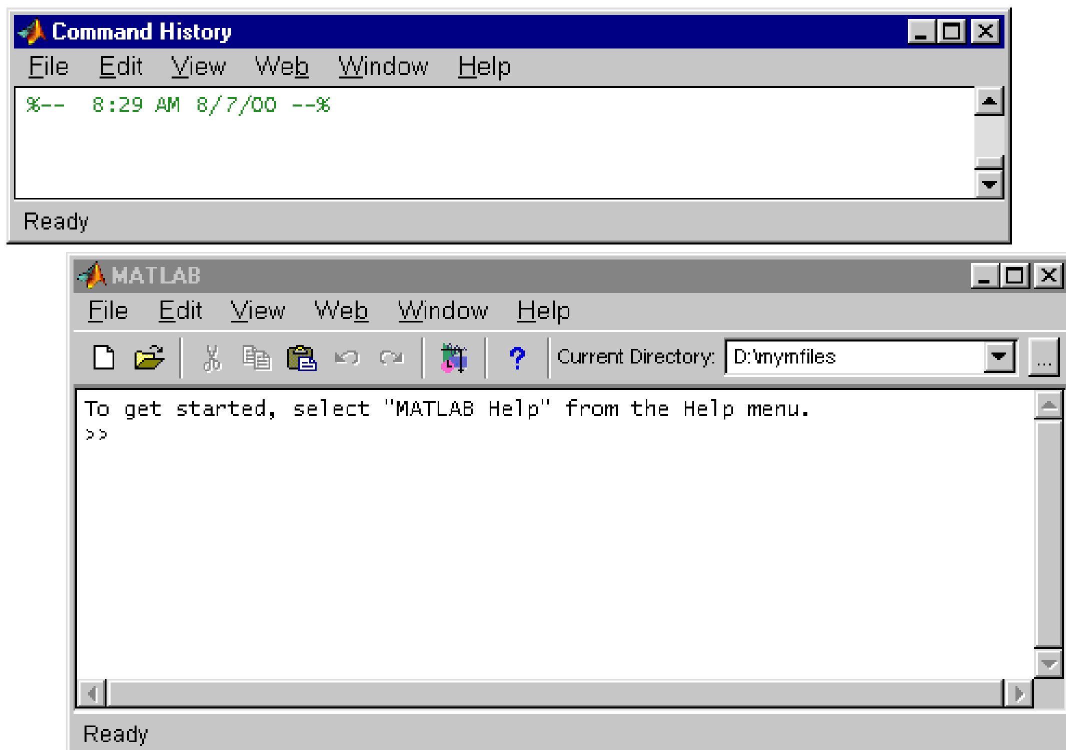
Eliberaţi mouse-ul pentru a vizualiza fereastra în noua locaţie. Celelalte ferestre în desktop sunt redimensionate pentru a se adapta la noua configuraţie. Următorul exemplu arată cum este dispus desktop-ul după mutarea ***Command History window*** deasupra ***Command Window***.



Mutare în afara MATLAB Desktop. Pentru a muta ferestre în afara ***MATLAB Desktop*** există mai multe variante:

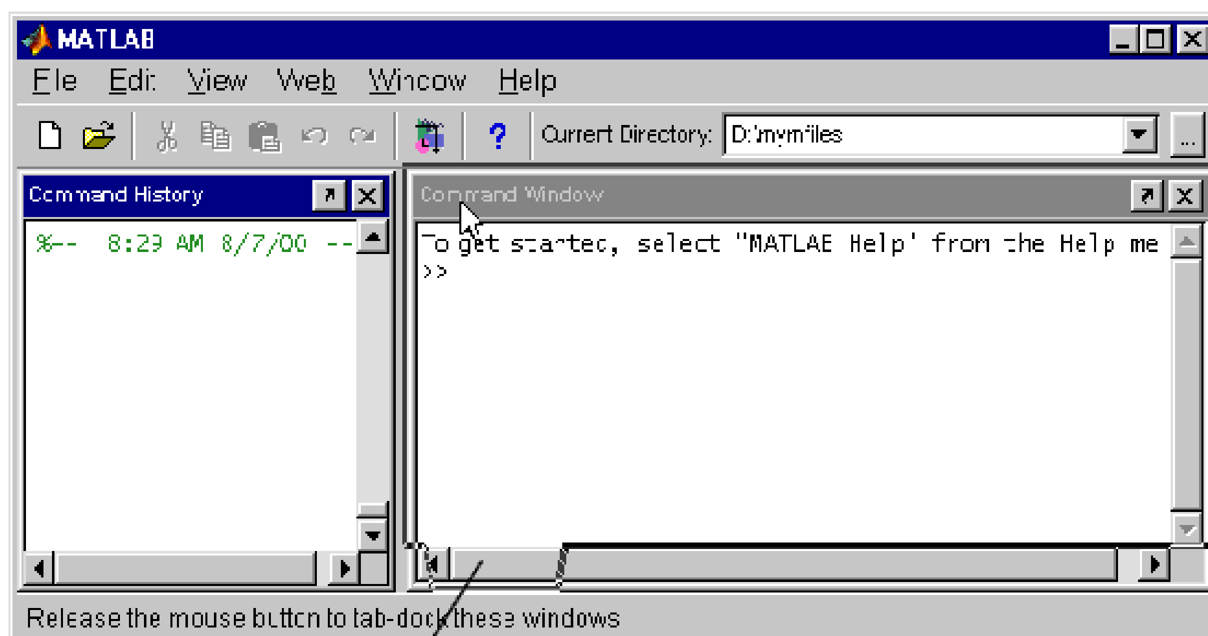
- ***Clicaţi*** pe săgeata din title bar-ul ferestrei pe care doriţi sa o mutaţi în afara ***MATLAB Desktop***,
- ***Selectaţi Undock*** din meniul ***View*** al acelei ferestre; fereastra trebuie sa fie activă,

- ***Mutaţi title bar***-ul ferestrei în afara ***MATLAB Desktop***; pe măsură ce mutaţi ***title bar***, un contur al ferestrei va apare. Când cursorul este în afara ***MATLAB Desktop***, ***eliberaţi*** mouse-ul. Fereastra apare în afara ***MATLAB Desktop***. În exemplul următor, ***Command History window*** a fost mutată în afara ***MATLAB Desktop***.



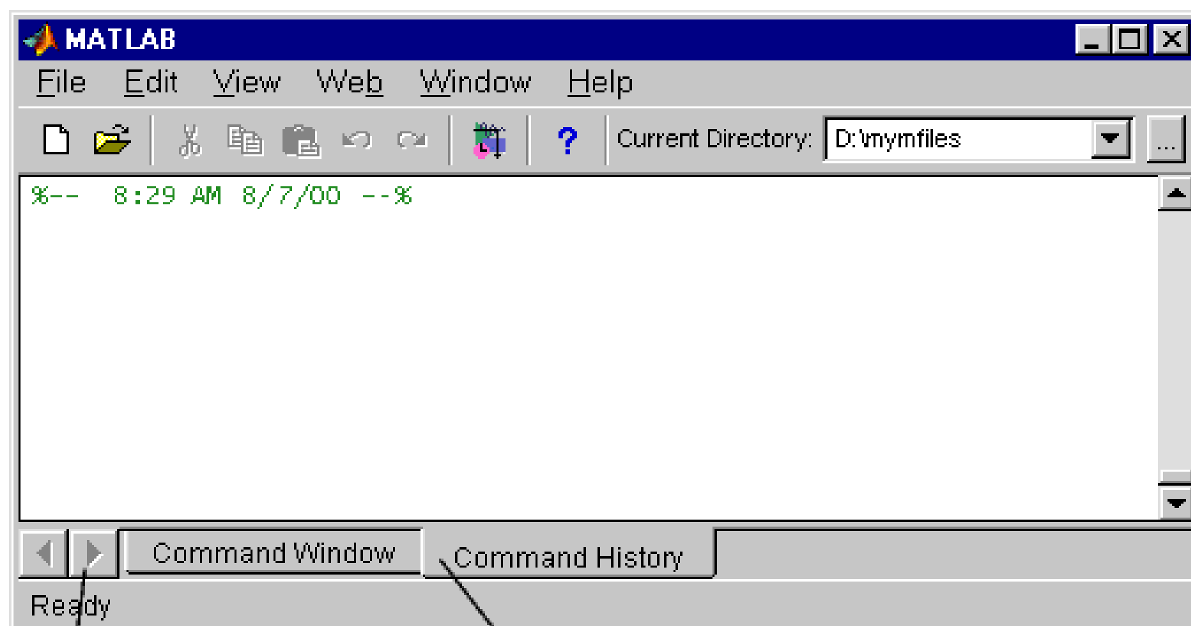
Mutarea ferestrelor din exteriorul MATLAB Desktop în interior. Pentru a muta o fereastra din exteriorul ***MATLAB Desktop*** în interior, selectaţi opţiunea ***Dock*** din meniul ***View*** al ferestrei respective.

Gruparea (Tabbing) ferestrelor împreuna. Puteţi grupa ferestrele aşa încât acestea sa ocupe acelaşi spaţiu în ***MATLAB Desktop***, păstrând însă accesul la toate ferestrele. Pentru a grupa împreuna ferestre ***mutaţi*** (***dragging***) ***title bar***-ul unei ferestre din desktop deasupra ***title bar***-ului unei alte ferestre din desktop. Conturul ferestrei pe care o mutaţi se suprapune peste fereastra a doua, şi partea inferioară a conturului include un tab. În exemplul următor, ***Command History window*** este iniţial la stânga ***Command Window*** şi ***title bar*** este ***draggată*** deasupra ***title bar***-ului ferestrei ***Command Window***.



Outline of window, including tab

Apoi ***eliberaţi*** mouse-ul. Ambele ferestre ocupă acelaşi spaţiu şi în zona inferioară a ferestrelor apar tab-uri ce permit identificarea ferestrelor. În exemplul următor, fereastra ***Command History*** şi ***Command Window*** sunt grupate împreună, cu fereastra ***Command History*** activă.



Use arrows to show any tabs that aren't in view. In this example, the arrows are grayed, indicating all tabs are in view.

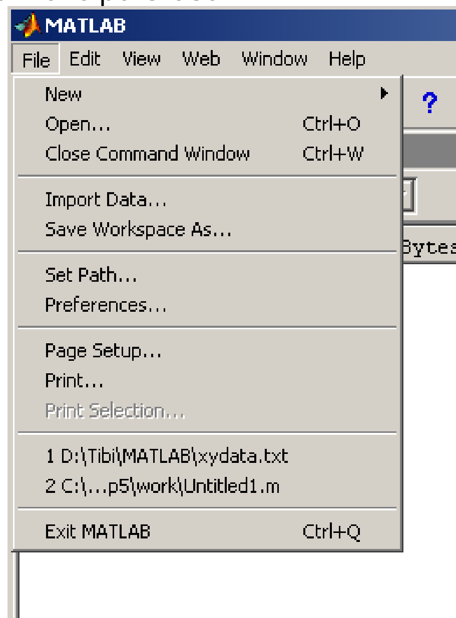
There are labeled tabs for each tool tabbed together in the window. Click a tab to view that tool.

Vizualizarea ferestrelor grupate. Pentru a vizualiza o fereastra grupată, ***clicaţi*** pe ***tab***-ul ferestrei. Fereastra trece în prim plan şi devine fereastră curentă activă. Dacă există mai

multe tab-uri într-o fereastră decât sunt vizibile, ***folosiţi săgeţile spre dreapta*** pentru a vedea şi alte tab-uri.
Mutarea ferestrelor grupate. Pentru a muta o fereastră grupată spre o altă locaţie, ***mutaţi title bar***-ul sau ***tab***-ul spre noua locaţie. O puteţi muta în interiorul sau exteriorul ***MATLAB Desktop***.

Închiderea ferestrelor grupate. Când ***clicaţi*** pe ***close box***-ul ferestrei care este parte a unui grup de ferestre, se închide doar fereastra în cauză. Nu puteţi închide toate ferestrele grupate deodată, ci una câte una.
1.5.5. Comenzi de închidere a unei ferestre MATLAB. Pentru închiderea unei ferestre MATLAB se poate acţiona în mai multe feluri, şi anume:

- ***Clicaţi*** pe ***close box***-ul ferestrei
- ***Deselectaţi*** în meniul ***View*** fereastra care trebuie închisă
- ***Clicaţi*** pe meniul ***File*** + ***clic*** pe ***Close***



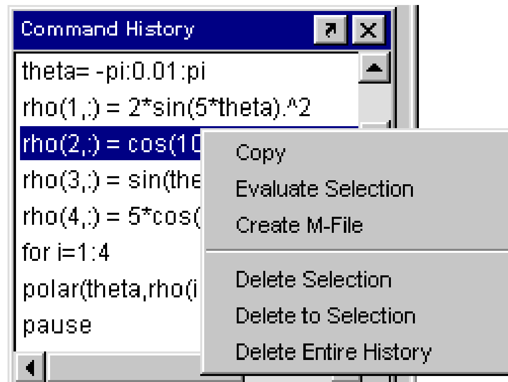
1.5.6. Configuraţia predefinită a MATLAB Desktop. Există şase configuraţii predefinite de ***MATLAB Desktop***, pe care le puteţi selecta din meniul ***View*** + ***Desktop Layout***:

- ***Default*** – conţine ferestrele ***Command Window***, ***Command History*** şi ***Current Directory browser*** grupate împreună, şi ***Launch Pad*** şi ***Workspace browser*** grupate deasemenea împreună.
- ***Command Window Only*** - conţine doar fereastra ***Command Window***. Această opţiune face ca ***MATLAB Desktop*** sa apară similar cu versiunile de MATLAB anterioare.
- ***Simple*** - conţine fereastra ***Command History*** şi ***Command Window***, una lângă alta.
- ***Short History*** - conţine fereastra ***Current Directory browser*** şi ***Workspace browser*** grupate împreună deasupra ferestrei ***Command Window*** şi deasupra ferestrei ***Command History*** de talie redusă.
- ***Tall History*** - conţine ferestrele ***Command History*** în stânga şi ***Current Directory browser*** şi ***Workspace browser*** grupate împreuna deasupra ferestrei ***Command Window***.
- ***Five Panel*** - conţine fereastra ***Launch Pad*** deasupra ferestrei ***Command History*** în stânga, ***Workspace browser*** deasupra ***Current Directory browser*** în centru, şi ***Command Window*** în dreapta. După selectarea unei configuraţii predefinite, puteţi muta, redimensiona, şi deschide/ închide ferestrele.

1.5.7. Accesarea The MathWorks pe Web. Puteţi accesa din ***MATLAB Desktop*** paginile Web clasice ale MathWorks, selectând una dintre următoarele opţiuni: The MathWorks Web

Site, MATLAB Central, MATLAB File Exchange, MATLAB Newsgroup Exchange, Check for Updates, Products, Membership, Technical Support Knowledge Base.

1.5.8. Meniul contextual. Multe dintre facilităţile ***MATLAB Desktop*** sunt disponibile din meniurile contextuale, cunoscute ca ***pop-up*** meniuri. Pentru a accesa un meniu contextual, ***clic-dreapta*** pe o entitate şi meniul contextual împreuna cu operaţiunile specifice devine vizibil. Mai jos se prezintă meniul contextual al ferestrei ***Command History window.***



Access context (pop-up) menus by right-clicking on a selection.

1.5.9. Taste cu rol de prescurtare şi accelerare. Puteţi accesa multe articole de meniu folosind prescurtări sau taste acceleratoare cum ar fi ***Ctrl+X*** care este identic cu operaţiunea ***Cut*** pe platforme Windows, sau ***Alt+F*** pentru accesarea meniului ***File***. Multe dintre prescurtări sunt listate mai jos:

Enter – ***echivalent*** al unui ***dublu-clic***, execută acţiunea curentă asupra unei selecţii. De pildă, ***apăsând Enter*** când este selectată o linie în ***Command History window*** acea comandă este executată în ***Command Window***.

Escape – ***anulează*** acţiunea curentă.

Ctrl+Tab sau ***Ctrl+F6*** – ***deplasare*** spre ***tab***-ul ***următor*** în desktop, sau spre ***fişierul următor*** deschis în ***Editor/Debugger***.

Ctrl+Shift+Tab – ***deplasare*** spre ***tab***-ul ***anterior*** în desktop, sau spre ***fişierul anterior*** deschis în ***Editor/Debugger***.

Ctrl+Page Up – ***deplasare*** la ***tab***-ul ***următor*** într-un grup de unelte sau fişiere grupate împreună.

Ctrl+Page Down – ***deplasare*** spre ***tab***-ul ***anterior*** într-o fereastră.

Alt+F4 – ***închide*** desktop-ul sau fereastra în afara desktop.

Alt+Space – ***afisează*** meniul sistem.

1.5.9. Selectarea simultană a mai multor articole. În multe ferestre ale desktop-ului, puteţi selecta simultan mai multe articole şi apoi puteţi executa o acţiune asupra tuturor articolelor. Puteţi selecta simultan mai multe articole ***clicând pe primul articol ţinând apăsată tasta Ctrl*** şi apoi ***clicând pe articolul următor*** pe doriţi să-l selectaţi. Repetaţi acest ultim pas până aţi selectat toate articolele dorite. ***Dacă ţineţi apăsată tasta Shift*** în locul tastei ***Ctrl în timp ce clicaţi*** pe un articol, ***veţi selecta toate articolele*** cuprinse între cele două articole selectate. Puteţi executa asupra articolelor o comandă comună cum ar fi de pildă ***Delete***.

1.5.10. Folosirea Clipboard-ului. Puteţi executa operaţiuni ***cut*** şi ***copy*** asupra unei selecţii dintr-o fereastră ***desktop*** spre ***clipboard*** şi apoi să executaţi paste în altă fereastră desktop. Folosiţi meniul ***Edit***, meniurile contextuale, sau prescurtările standard. De pildă, puteţi executa ***copy*** asupra unei selecţii de comenzi din ***Command History window*** şi să executaţi ***paste*** în desktop. Articolul ***Paste Special*** din meniul ***Edit*** deschide selecţia din clipboard în ***Import Wizard***. O puteţi folosi pentru a copia datele dintr-o alta aplicaţie, cum ar fi din Excel, în MATLAB.

Pentru a anula cea mai recentă execuţie ***cut, copy***, sau ***paste***, selectaţi ***Undo*** din meniul ***Edit***. Folosiţi ***Redo*** pentru a executa din nou acele operaţiuni (acţiune opusa lui ***Undo***). Puteţi deasemenea realiza ***copierea prin draggarea selecţiei***. De pildă, dacă selectaţi ceva din ***Command History window*** şi ***dragaţi selecţia în Command Window***, este echivalent cu execuţia comenzii ***paste***. Puteţi în continuare sa editaţi liniile în ***Command Window.***

1.5.11. Proprietăţi generale ale MATLAB Desktop. Puteţi modifica proprietăţile predefinite ale ***MATLAB Desktop***, cum ar fi fontul utilizat în ***Command Window***. Proprietăţile rămân valabile pe durata sesiunii MATLAB. Unele ferestre vă permit controlul acestor aspecte din meniul propriu ferestrei respective. Pentru modificarea proprietăţilor selectaţi ***Preferences*** din meniul ***File***. Cutia de dialog ***Preferences*** se deschide şi permite modificarea proprietăţilor prin selecţia tipului de proprietăţi.

În exemplul de mai jos sunt modificate proprietăţile ***General***. Dacă apare un semn + în stânga articolului, ***clicaţi*** pe + pentru a afişa în detaliu articolele conţinute, şi apoi ***selectaţi*** articolul ale cărui proprietăţi doriţi să le modificaţi. Panelul din dreapta reflectă tipul de proprietăţi pe care le-aţi selectat. În panelul din dreapta specificaţi proprietăţile dorite şi ***clicaţi*** pe ***OK***. Proprietăţile se vor schimba imediat.

